

THÈSE

de Docteur - Ingénieur

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

Maurice AZÉMA

pour obtenir

le grade de Docteur - Ingénieur

SUJET DE LA THÈSE

**ÉTUDE D'UN MODÈLE MATHÉMATIQUE
POUR LES FABRICATIONS PÉRIODIQUES**

soutenue le 21 Avril 1971 devant la Commission d'Examen

MM.	J. VILLE	Président
	R. FORTET	} Examineurs
	B. ROY	

THÈSE

de Docteur - Ingénieur

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

Maurice AZÉMA

pour obtenir

le grade de Docteur - Ingénieur

SUJET DE LA THÈSE

**ÉTUDE D'UN MODÈLE MATHÉMATIQUE
POUR LES FABRICATIONS PÉRIODIQUES**

soutenue le 21 Avril 1971 devant la Commission d'Examen

MM.	J. VILLE	Président
	R. FORTET	} Examineurs
	B. ROY	



Je remercie vivement Monsieur le Professeur VILLE de l'honneur qu'il me fait de présider le jury de cette thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur FORTET pour la confiance qu'il m'a témoignée.

Cette thèse n'aurait sans doute jamais abouti sans l'aide si naturellement efficace et le persévérant soutien de Monsieur ROY. Je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de la respectueuse gratitude d'un de ses disciples.

A Monsieur AGARD et Monsieur SUSSMANN je suis redevable de nombre de mes connaissances sur l'ordonnancement, je les prie de croire à mes sincères remerciements.

Cette thèse doit également beaucoup à Messieurs CAPDEVILLE, EUGENE, DERAÏ, BOUR de la Société Nationale Industrielle Aérospatiale qui m'ont fait bénéficier de leurs conseils et de conditions de travail exceptionnelles.

P L A N

INTRODUCTION

Pages
1

partie	<u>PRESENTATION DU PROBLEME, SA FORMULATION MATHEMATIQUE</u>	4
1.1	<u>Problèmes d'ordonnancement d'ateliers et systèmes de potentiels sur un graphe</u>	5
1.11	Enoncé d'un problème d'ordonnancement d'atelier	5
1.11.1	Données du problème	5
1.11.2	Inconnues	8
1.11.3	Objectifs	8
1.12	Problèmes d'ordonnancement d'ateliers équivalents à la recherche d'un système de potentiels	9
1.12.1	Définition d'un système de potentiels	9
1.12.2	Les hypothèses qui rendent un problème d'ordonnancement d'atelier équivalent à la recherche de potentiels	10
1.12.3	Les résultats fondamentaux de la théorie des potentiels	13
1.12.4	Prolongements de la théorie des potentiels	14
1.2	<u>Fabrications périodiques</u>	16
1.21	Définition intuitive	16
1.22	Définition des fabrications périodiques	17
1.23	Intérêt de la périodicité de l'exécution des tâches	18
1.24	Un premier modèle de fabrications périodiques	18
1.24.1	Formulation mathématique de ce premier modèle	19
1.24.2	La situation qui a justifié le développement d'un modèle plus général	20

	<u>Pages</u>
1.3 <u>Modèle mathématique pour les fabrications périodiques</u>	22
1.31 Choix de représentants adaptés à la traduction de l'ordre sur les machines	23
1.32 Choix de représentants adaptés à la traduction des gammes	24
1.33 La relation entre "représentant machine" et "représentant gamme"	24
1.34 Formulation mathématique complète du modèle	25
e Partie <u>MOYENS D'ANALYSE ET DE RESOLUTION DU PROBLEME</u>	28
2.1 <u>Définitions et résultats préliminaires</u>	30
2.11 L'importance de la notion de plus long chemin, le graphe $\hat{g}$ associé à un graphe g	30
2.12 Un premier intérêt des graphes $\hat{\Gamma}_g$ pour la résolution du modèle de fabrication périodique	31
2.13 Une conséquence de la Proposition 1 qui est fondamentale pour les démonstrations ultérieures	33
2.2 <u>Minimisation de la période</u>	34
2.21 La détermination du θ minimum lorsque g n'a pas de circuit	37
2.22 C.N.S. pour que l'ensemble des solutions du problème soit borné	38
2.23 Réduction de la taille de certains problèmes d'optimisation d'une fonction des t_i	40
2.3 <u>Minimisation des en cours</u>	42
2.31 Principe de la méthode de résolution	42
2.32 Recherche d'un système d'intervalles en équilibre	43
2.33 Intérêt des s.i.e pour un problème défini par Γ_g	46
2.34 Définition d'un s.i.e adaptée à la MINIMISATION DES EN COURS	46



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543720_0049

	Pages
2.35 Résolution complète du problème : adaptation de P.S.E.P.	49
2.351 Principe de l'adaptation de P.S.E.P.	50
2.352 Détails sur l'adaptation de P.S.E.P.	50
- place et rôle de la recherche d'un s.i.e	50
- détails sur la séparation d'un hypercube	51
2.4 <u>Aspects informatiques</u>	53
2.41 Principes de la programmation	53
2.411 Représentation matricielle des graphes	53
2.412 La représentation matricielle des graphes et la programmation des algorithmes 1, 2 et de P.S.E.P.	55
2.42 Limites des programmes	59
2.43 Conclusion	62
e partie <u>RESULTATS PRATIQUES</u>	64
3.1 Recherche d'une solution	66
3.2 Recherche d'une solution optimale	68
3.21 Recherche d'un s.i.e initial	68
3.22 Déroulement de P.S.E.P.	69
exe 1 <u>TAILLE DES LOTS ET PERIODICITE DE L'EXECUTION DES TACHES</u>	1
1. Relation entre la taille des lots et la période	2
2. Taille des lots et régulation des charges dans une fabrication périodique	
3. Taille des lots et régulation des charges dans une fabrication non périodique	3
4. Un moyen terme possible	
exe 2 <u>REMISE EN CAUSE DE L'ORDRE SUR LES MACHINES</u>	
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	

Soit un problème d'ordonnancement d'atelier équivalent à la recherche d'un système de potentiels sur un graphe. Le but visé dans ce travail est de tirer partie d'une situation courante dans les ateliers de construction mécanique : la périodicité de l'exécution des tâches sur les machines. Ceci de manière à élaborer un modèle mathématique adapté à la recherche de la production maximum ou des coûts d'encours minimum.

En d'autres termes, on étudie des ensembles $\{C_i\}$ de dates de début de tâches. L'ensemble des tâches étant muni

- de deux relations d'ordres définies par des contraintes conjonctives :

$$i < i' \iff C_{i'} - C_i \geq a_{ii'} > 0$$

La première de ces relations d'ordres traduit la succession des tâches sur une pièce. La seconde, la succession des tâches sur une machine.

- d'une relation d'équivalence (formalisation de la périodicité)

$$i \sim j \iff C_j = C_i + k_{ij} \theta \quad k_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (\theta \text{ est la période})$$

Les axes d'intérêt étant :

1. l'existence d'ensemble $\{C_i\}$ quand $\theta \in \mathbb{R}$. Le plus petit θ pour lequel il existe une solution assurant la production maximum,
2. à θ fixé, la recherche d'un ensemble $\{C_i\}$ qui minimise une fonction représentant les durées de fabrication.

CONTENU DES DIFFERENTES PARTIES DE CE DOCUMENT

Première Partie :

PRESENTATION DU PROBLEME, SA FORMULATION MATHEMATIQUE.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés à des rappels sur les problèmes d'ordonnement d'atelier et les systèmes de potentiels sur un graphe, ainsi qu'à l'exposé des motifs de cette étude.

Dans le troisième paragraphe il est question de l'écriture des contraintes conjonctives $\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j \gg a_{ij}$ en fonction de représentants des classes d'équivalences induites par la relation

$$i \sim j \iff \mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j + k_{ji} \theta \quad k_{ji} \in \mathbb{Z}$$

Le modèle mathématique résultant est un programme linéaire mixte auquel on peut associer un graphe.

Deuxième Partie

MOYENS D'ANALYSE ET DE RESOLUTION DU PROBLEME

La matière commune aux moyens d'analyse et de résolution envisagés est une condition nécessaire pour l'existence d'une solution. Cette condition est dérivée de la C.N.S. d'existence d'un système de potentiels sur un graphe.

Elle suffit pour construire une solution lorsque le graphe associé aux gammes n'a pas de circuit. Mais, dans le cas général ou la recherche de l'optimum d'une fonction des $\mathcal{C}_i$, on doit terminer la détermination des variables entières k par une procédure du type S.E.P.

Cette deuxième partie est complétée d'un paragraphe où l'on s'efforce de montrer que la représentation matricielle des graphes est adaptée à la résolution pratique du problème. L'argument principal est fondé sur deux résultats qui autorisent de travailler sur des sous matrices.

Troisième Partie

RESULTATS PRATIQUES

A propos d'un problème réel de petite taille on présente la recherche d'une solution puis le cheminement vers une solution optimale.

A N N E X E S

Les annexes ont trait à la discussion ou la remise en cause de deux hypothèses: la taille des lots de pièces et l'ordre des opérations sur les machines sont fixés.

Ces hypothèses sont indispensables pour que notre problème soit équivalent à la recherche d'un système de potentiels.

Annexe 1.

TAILLE DES LOTS ET PERIODICITE DE L'EXECUTION DES TACHES.

La détermination de la taille des lots de pièces est un problème délicat car l'influence de la taille des lots sur les coûts de la fabrication dépend des règles d'ordonnancement.

On montre dans cette annexe que l'exécution périodique des tâches permet de poser clairement ce problème sinon de le résoudre.

Annexe 2.

REMISE EN CAUSE DE L'ORDRE DES OPERATIONS SUR LES MACHINES.

La méthode développée dans la deuxième partie pour déterminer les variables entières k_i est étendue aux problèmes d'ordonnancement avec contraintes disjonctives. Les deux problèmes sont en effet semblables, les k_i ou les variables booléennes associées aux contraintes disjonctives figurent uniquement dans la longueur de certains arcs du graphe représentant les contraintes.

Première Partie

PRESENTATION DU PROBLEME, SA FORMULATION MATHEMATIQUE

Les deux premiers paragraphes de cette première partie sont un complément à notre introduction, ils visent l'explication des motifs de cette étude.

Partant de la définition des problèmes d'ordonnancement d'ateliers, nous indiquons les hypothèses et les idées qui nous ont conduits à définir le modèle formalisé puis étudié dans la suite. Au fil de ces paragraphes on rencontrera

1. - l'énoncé d'un problème d'ordonnancement d'atelier ,
 - les hypothèses qui rendent un problème d'ordonnancement d'atelier équivalent à la recherche d'un système de potentiels sur un graphe,
 - les résultats fondamentaux de la théorie des systèmes de potentiels sur un graphe.
2. - la définition des fabrications périodiques,
 - un premier modèle mathématique d'une fabrication périodique dont la discussion devrait éclairer l'origine de celui que nous proposons.

Le troisième paragraphe contient, outre la formulation mathématique du modèle, les définitions indispensables à la présentation des moyens d'analyse et de résolution qui sont l'objet de la deuxième partie.

1.1 PROBLEMES D'ORDONNANCEMENT D'ATELIERS ET SYSTEMES DE POTENTIELS
SUR UN GRAPHE

1.11 Enoncé d'un problème d'ordonnancement d'atelier

Un atelier est un ensemble de postes de travail destinés à l'usinage, le montage, la manutention, le contrôle... de pièces.

Les usinages, assemblages... sont généralement précédés de la préparation de la machine utilisée c'est-à-dire le montage des outils appropriés, les réglages... Afin de réduire les temps improductifs de préparation de machines on regroupe en lots des pièces identiques, ainsi les préparations servent plusieurs fois consécutives.

Nous appellerons tâche ou opération l'usinage ou le montage ou ... de toutes les pièces d'un lot, la durée (notée d_i) de la tâche i sera la somme du temps de préparation et d'autant de durées unitaires d'exécution qu'il y a de pièces dans le lot. A chaque tâche sera associée sa date de début notée C_i .

1.11.1 Données du problème

La description d'un problème d'ordonnancement d'atelier tient dans les données suivantes classées en quatre rubriques :

1/ Le plan de production . Il spécifie les besoins de pièces que doit satisfaire l'atelier. On rencontre deux modes de spécification :

- en termes de nombre de pièces et de délai
(exemple : 10 "cardans", 20 "moyeux"... doivent être réalisés pour le 10 octobre 1970).

- en termes de nombre de pièces et de cadences ou fréquences. Si l'unité de temps est le mois, produire des "cardans" à cadence 10 revient à réaliser 10 "cardans" tous les mois. A partir de la cadence et de la taille du lot on calcule la période de fabrication θ :

$$\theta = \frac{\text{taille du lot}}{\text{cadence}}$$

(exemple : si les "cardans" sont fabriqués à cadence 10/mois par lot de 5 unités, la période est 1/2 mois).

- 2/ Les gammes. Les modalités de la fabrication d'une pièce sont définies par sa gamme. Une gamme comporte au moins les informations suivantes :

- la définition des tâches que subit la pièce,
- les éléments pour le calcul de la durée des tâches (temps de préparation et temps unitaire),
- une relation d'ordre sur l'ensemble des tâches.
Si deux tâches i et i' ne peuvent être réalisées simultanément sur les pièces d'un lot, la gamme spécifie, par exemple, que i' est supérieur à i en ce sens que i' peut commencer au plus tôt $a_{ii'}$ unités de temps après le début i (ce qu'on peut traduire par la relation $\mathcal{C}_{i'} - \mathcal{C}_i \gg a_{ii'}$ entre les dates de début de i et i'),
- les postes de travail capables de réaliser chaque tâche. Pour les tâches classiques (tournage, fraisage...) la gamme mentionne en général plusieurs machines.

3/ Les moyens de production c'est-à-dire l'ensemble
des postes de travail

L'ensemble des postes de travail peut être décomposé en deux classes :

- les postes qui n'exécutent qu'une tâche à la fois (exemple : machine-outil),
- les postes qui exécutent plusieurs tâches simultanément (exemple : le recuit de pièces différentes peut être exécuté dans le même four).

Cette classification est fonction du degré de détail dans la description des tâches, ainsi une équipe d'ajusteurs entre dans la première ou la seconde classe suivant que les tâches sont affectées individuellement aux compagnons ou non.

4/ Les éléments de calcul des coûts

Le coût de la fabrication d'une pièce est la somme de trois termes :

- le coût d'utilisation des machines qui comprend les frais de main-d'oeuvre, l'amortissement du matériel...
- le coût du stockage de la matière première et des produits semi finis ou finis. Il est essentiellement fonction de la taille des lots de pièces.
- le coût des "en cours" qui est le coût de l'argent immobilisé dans la paie du personnel, l'achat de matière première... jusqu'à la vente du produit fini. Ce coût est fonction de la durée de fabrication de chaque lot de pièces.

.../

1.11.2 Les inconnues d'un problème d'ordonnancement d'atelier

Un problème d'ordonnancement d'atelier comporte systématiquement les trois inconnues suivantes :

- la taille des lots des pièces,
- l'affectation des tâches aux machines (lorsque la gamme mentionne qu'une tâche peut être exécutée indifféremment sur plusieurs machines),
- les dates de début des tâches.

Dans le cas d'une fabrication périodique, nous verrons une quatrième inconnue : la période d'exécution des tâches.

Lorsqu'une valeur est donnée à ces inconnues, on peut compléter l'ordonnancement par la prévision des besoins en matière première, outillages ..., le calcul des niveaux des stocks.

1.11.3 Les objectifs d'un problème d'ordonnancement d'atelier

En termes généraux, l'objectif d'un ordonnancement est de déterminer la valeur des inconnues précédentes qui réalise "le meilleur" compromis entre les coûts de la fabrication et la quantité de pièces produites.

En pratique, du fait de la difficulté du problème, on se donne des objectifs partiels du type

- respecter les délais prévus par le plan de production,
- maximiser la quantité produite,
- minimiser une fonction des durées de fabrication si le coût des en cours est le facteur prépondérant du coût de la fabrication.

- "optimiser" la taille des lots de pièces si le coût du stockage ou de la préparation des machines sont prépondérants devant le coût des en cours.

1.12 Problèmes d'ordonnancement d'ateliers équivalents à la recherche d'un système de potentiel sur un graphe.

1.12.1 Définition d'un système de potentiel sur un graphe

Une inégalité de potentiel (ou contrainte conjonctive) est de la forme $\mathcal{C}_{i'} - \mathcal{C}_i \geq a_{ii'}$, $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_{i'}$ sont des variables, $a_{ii'}$ une constante ou un paramètre.

Lorsque $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_{i'}$ sont les dates de début de deux tâches i et i' ,

- si $a_{ii'} \geq 0$, la relation $\mathcal{C}_{i'} - \mathcal{C}_i \geq a_{ii'}$ contraint i' à commencer au plus tôt $a_{ii'}$ heures après i ,

- si $a_{ii'} < 0$, i doit commencer au plus tard $-a_{ii'}$ heures après i' .

Un système d'inégalités de potentiel peut être représenté par un graphe dont les sommets correspondent aux tâches et l'arc de i à i' de longueur $a_{ii'}$, à l'inégalité $\mathcal{C}_{i'} - \mathcal{C}_i \geq a_{ii'}$. La solution d'un système d'inégalités de potentiels est appelée système de potentiel sur le graphe ainsi défini.

Exemple

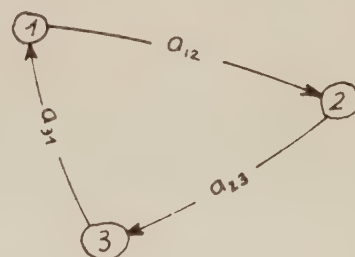
Système d'inégalités de potentiel

$$\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1 \geq a_{12}$$

$$\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_2 \geq a_{23}$$

$$\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_3 \geq a_{31}$$

Graphe associé



.../

1.12.2 Les hypothèses qui rendent un problème d'ordonnancement d'atelier équivalent à la recherche d'un système de potentiel sur un graphe.

En premier lieu, les inconnues du problème doivent se résumer aux seules dates de début des tâches. Par suite,

- les tailles des lots doivent être déterminées préalablement à l'ordonnancement,
- chaque tâche doit être affectée à une des machines que prévoit la gamme;
- l'exécution simultanée de deux tâches sur un même poste de travail est exclue dès que l'on doit tenir compte de limitations sur la capacité des postes de travail (effectif des équipes, taille des fours ...),
- Enfin, dans le cas des fabrications périodiques définies au second paragraphe, la période est déterminée préalablement à la recherche des dates de début.

En second lieu, chaque fois que deux tâches i et i' ne peuvent être exécutées simultanément, on doit choisir un des éléments de l'alternative $\left\{ \begin{array}{l} i \text{ exécuté avant } i' \text{ soit } C_{i'} - C_i \gg a_{ii'} ; \\ i' \text{ exécuté avant } i \text{ soit } C_i - C_{i'} \gg a_{ii'} \end{array} \right\}$. Pour ce qui est de deux opérations sur un même lot de pièces, nous avons vu que ce choix était donné dans la gamme. Par contre si i et i' sont exécutés sur la même machine, ce choix est dans la plupart des cas une hypothèse.

Sous ces diverses hypothèses, les contraintes qui traduisent le plan de production, les gammes et la succession des tâches sur les machines sont les suivantes :

1/ cas du plan de production

Soit f la dernière opération subie par un lot et C_0 l'origine des temps.

Quand le plan de production spécifie que le lot doit être terminé à la date T on écrit $\mathcal{C}_f + d_f - \mathcal{C}_0 \leq T$ soit $\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_f \geq -(T - d_f)$

Quand il spécifie qu'un lot doit être terminé toutes les θ unités de temps, on écrit $\mathcal{C}_f^{q+1} = \mathcal{C}_f^q + \theta$ ou $\mathcal{C}_f^q$ est le début de f sur le q^{ieme} lot.

2/ cas des gammes

La relation d'ordre sur l'ensemble des tâches qui traduit la succession des tâches sur un lot de pièces est défini par un ensemble d'inégalités de potentiel du type

$$\mathcal{C}_{i'} - \mathcal{C}_i \geq a_{ii'} \quad \text{où} \quad a_{ii'} = d_i + \tau_{ii'}$$

- $\tau_{ii'}$ positif représente, par exemple, un temps de transport du lot entre la machine qui exécute i et celle qui exécute i'
 $-\tau_{ii'}$ est négatif si des pièces du lot subissent i' avant que la totalité du lot n'ait subi i

Le graphe associé à une gamme est connexe et possède un sommet qui est un ascendant de tous les autres (i.e : une antibase réduite à un sommet) et un sommet qui est un descendant de tous les autres (i.e : une base réduite à un sommet) Dans de nombreux cas ces deux sommets représentent respectivement deux tâches fictives : le lancement et la fin de la fabrication du lot.

Un exemple de graphe associé à une gamme est donné ci-dessous. L'arc de longueur négative du sommet 5 au sommet 0 représente une limitation sur la durée de la fabrication ($\mathcal{C}_5 \leq \mathcal{C}_0 + 20$), les autres arcs de longueur négative n'ont pas de signification dans l'ordonnancement d'atelier de fabrication mécanique, ils sont tracés en vue de donner plus de généralité à l'exemple car ils ne gênent en rien les méthodes développées par la suite.

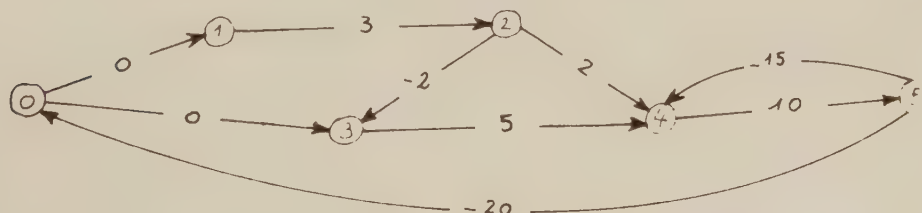


figure 1 : exemple de graphe associé à une gamme.

3/ cas de la succession des tâches sur une machine

De même que pour les gammes, la relation d'ordre traduisant la succession des tâches sur une machine est représentée par un graphe connexe ayant une base et une antibase réduite au sommet.

Comme, en général, l'exécution simultanée de deux tâches est exclue car on ne peut traduire les limitations sur la capacité du poste de travail en fonction des dates de début, cette relation est souvent totale et le graphe admet un chemin hamiltonien.

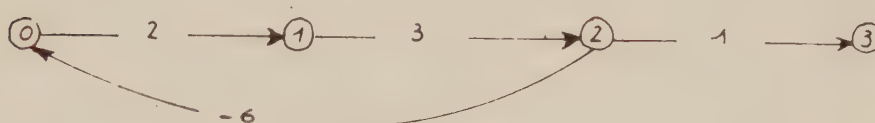


Figure 2 : exemple de graphe "associé à une machine"

En définitive, le graphe associé à un problème d'ordonnancement d'atelier équivalent à la recherche de potentiels à l'allure ci-dessous.

Les arcs traduisant les gammes sont tracés "horizontalement", les arcs traduisant l'ordre sur les machines sont tracés "verticalement",

Quand un lot passe au plus une fois sur chaque machine, un sommet (ex : 3) situé à l'intersection d'une ligne (ex : P) et d'une colonne (ex : T) représente l'usinage d'une pièce sur une machine (ex : P sur T).

La tâche 0 est associée au lancement en fabrication des trois pièces, 8 à la fin de leur fabrication.

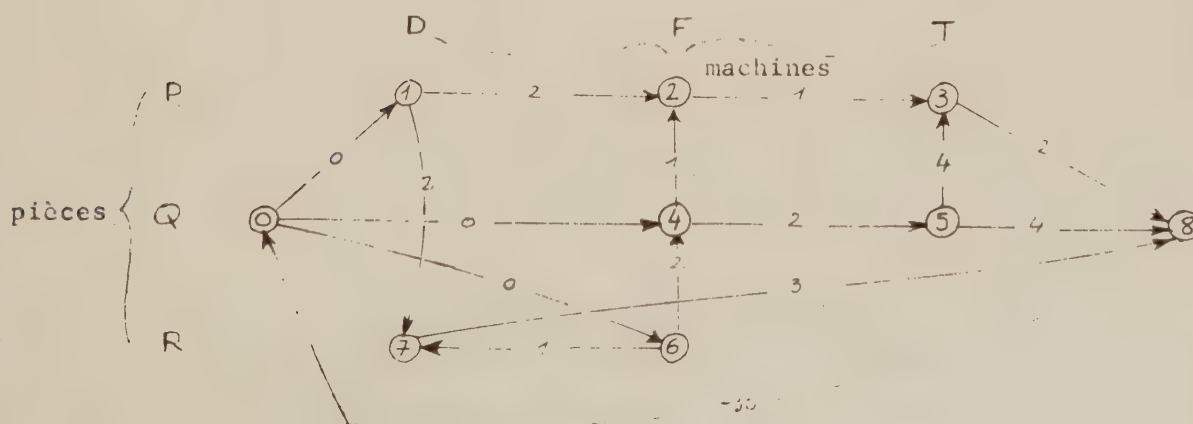


Figure 3

A propos d'un tel problème on peut avoir à répondre aux questions suivantes :

- existe-t-il un système de potentiel satisfaisant les contraintes ?
- quel est le système de potentiel qui minimise la durée de fabrication $\mathcal{C}_g - \mathcal{C}_o$?
- de combien peut-on avancer ou retarder le début $\mathcal{C}_i$ d'une tâche?
- comment construire un système de potentiel qui minimise une fonction des $\mathcal{C}_i$ significative du coût des en cours ?

Nous allons voir au prochain paragraphe comment la théorie des systèmes de potentiels sur un graphe répond à ces questions.

1.12.3 Les résultats fondamentaux de la théorie des systèmes de potentiels sur un graphe.

La théorie des systèmes de potentiels sur un graphe et ses prolongements ont été développés par B.ROY dans plusieurs ouvrages (en particulier [2], [3], [6], [7]) puis réunis dans "ALCEBRE MODERNE ET THEORIE DES GRAPHS" ([14]). Au fur et à mesure du besoin, nous reprendrons de nombreux résultats présentés dans ces publications.

Dès à présent on doit citer les propositions suivantes :

Proposition 1 : une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'inégalités de potentiel admette une solution est que le graphe associé n'ait pas de circuit de longueur positive.

La réciproque de cette proposition est établie au moyen d'un algorithme de recherche d'une solution; en bref on montre qu'un système de potentiel est l'ensemble $\{l_i\}$, loi : longueur du plus long chemin d'une antibase réduite à un sommet "o" à un sommet i . (note : on peut toujours se ramener au cas d'une antibase réduite à un point en ajoutant un sommet et des arcs de longueur zéro de ce sommet à tous ceux d'une antibase).

Proposition 2. Si le graphe possède une base et une antibase, l'ensemble des systèmes de potentiels muni des opérations vectorielles sup et inf est un treillis complet. (s'il possède uniquement une antibase il est un inf-demi treillis, une base un sup-demi treillis).

Le minorant universel est le système de potentiel $\{0_i\}$, le majorant universel est le minorant universel "du graphe" déduit du précédent en changeant le sens des arcs. (ie : $\{1_i\}$ si f est la base).

La connaissance de ces deux systèmes de potentiels que nous noterons $\{C_i^{MIN}\}$ et $\{C_i^{MAX}\}$, permet de dire : "on peut avancer ou reculer une date de début C_i de $C_i - C_i^{MIN}$ ou $C_i^{MAX} - C_i$ ".

Des tâches telles que $C_i^{MIN} = C_i^{MAX}$ sont dites critiques car tout retard dans leur exécution entraîne la violation d'une contrainte.

Outre ces deux propositions, il est important de noter que [2] contient un algorithme de recherche d'un système de potentiels qui minimise une fonction linéaire C_i .

1.12.4 Prolongements de la théorie des systèmes de potentiels sur un graphe.

Ces prolongements sont de même nature : la longueur de certains arcs devient fonction d'une inconnue.

Le premier prolongement est apparu dans un modèle de fabrication périodique que nous présentons dans la suite. Il consiste en l'adjonction d'arcs de longueurs $a_{ij} - \theta$ (θ inconnu) aux graphes que nous venons de considérer. Le problème associé sera "minimiser θ " sous les contraintes définies par un tel graphe.

Un second prolongement est lié à la remise en cause de l'ordre de succession des tâches sur les machines. Nous avons vu qu'un ordre de succession résultait du choix d'une option de l'alternative:

$\left\{ \begin{array}{l} j \text{ est usiné avant } j' \text{ soit } \mathcal{C}_{j'} - \mathcal{C}_j \geq d_j ; j' \text{ est usiné} \\ \text{avant } j \text{ soit } \mathcal{C}_j - \mathcal{C}_{j'} \geq d_{j'} \end{array} \right\}$ pour tout couple (j, j') de tâches qui ne peuvent être exécutées simultanément.

Or, on peut résumer ceci par les contraintes suivantes (dites disjonctives)

$$\mathcal{C}_{j'} - \mathcal{C}_j \geq \delta_{jj'} d_j - (1 - \delta_{jj'}) \Omega$$

$$\mathcal{C}_j - \mathcal{C}_{j'} \geq \delta_{jj'} d_{j'} - (1 - \delta_{jj'}) \Omega$$

$$\delta_{j j'} = 0 \text{ ou } 1, \delta_{j' j} = 0 \text{ ou } 1, \delta_{j j'} + \delta_{j' j} = 1, \Omega \text{ très grand.}$$

c'est-à-dire deux inégalités de potentiels représentables par des arcs dont la longueur dépend d'inconnues liées entre elles.

Enfin, ce document est consacré à un autre prolongement : les sommets du graphe sont rangés par couples (i, j) et $\mathcal{C}_i + k_{ij} \theta = \mathcal{C}_j$

$$k_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Lorsque θ est fixé, ce problème est voisin du précédent en ce sens que la contrainte peut s'écrire

$$\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_j \geq \lambda_j \theta$$

$$\mathcal{C}_j - \mathcal{C}_i \geq \mu_i \theta$$

$$\mu_i + \lambda_j = 0, \quad \mu_i, \lambda_j \in \mathbb{Z}$$

Nous verrons en annexe 2 comment les principes de la résolution de ce problème s'étendent au problème des contraintes disjonctives.

Remarque : En vertu de la proposition 1, pour s'assurer que les problèmes précédents ont une solution, il suffit de trouver la valeur des inconnues associées aux arcs telle que le graphe n'ait pas de circuit de longueur positive.

Ainsi dans le troisième prolongement ci-dessus, on détermine tout d'abord les variables entières k_i puis les dates de début.

1.2 FABRICATIONS PERIODIQUES

Les fabrications périodiques considérées sont des cas particuliers de problèmes d'ordonnancement d'atelier équivalents à la recherche d'un système de potentiels sur graphe.

On se place donc sous les hypothèses présentées en 1.12 notamment l'ordre des tâches sur les machines est fixé; dans les illustrations il sera supposé total.

1.21 Définition intuitive

La caractérisation des fabrications périodiques tient dans le diagramme ci-dessous qui représente l'occupation dans le temps d'une machine spécialisée dans trois tâches A, B, C.

Les tâches identiques $A_1, A_2, \dots$ sont exécutées sur les lots successifs d'une même pièce. θ est la période de la fabrication.



Figure 4

La fabrication des lots d'une pièce P peut être représentée par un diagramme du type suivant. P subit l'opération 1 sur la machine T, 2 et 4 sur la machine F, 3 sur R. La notation i/x^e signifie : exécution de l'opération i sur le x^e lot.

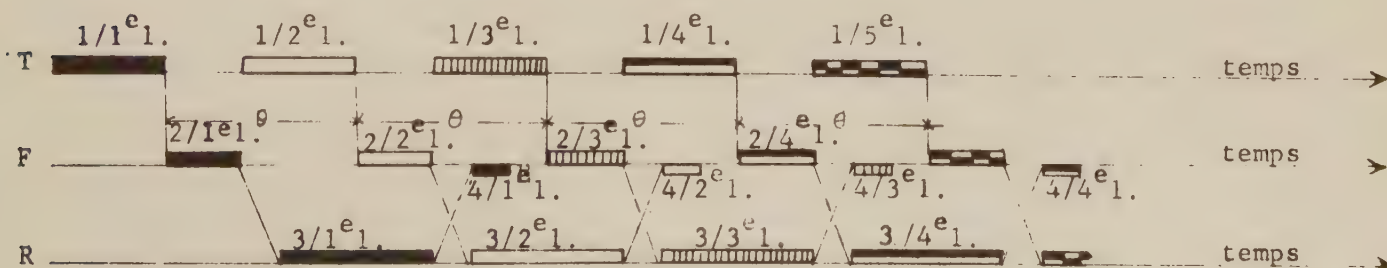


Figure 5

1.22 Définition des fabrications périodiques

Nous dirons que deux tâches i et i' sont équivalentes si ce sont des tâches identiques exécutées sur des lots différents d'une même pièce, i équivalent à i' sera noté $i \sim i'$.

Dans l'exemple ci-dessus " $1/1^e 1. \sim 1/2^e 1. \sim 1/3^e 1. \dots, 2/1^e \sim 2/2^e 1. \sim \dots, \dots$ "

Il est clair que $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des tâches et que, compte tenu des diagrammes précédents,

$$i \sim i' \iff \mathcal{G}_i' = \mathcal{G}_i + k_{ii'} \theta, \text{ k est un entier relatif.}$$

Cette remarque conduit à la

Définition 1 : Une fabrication périodique de période θ équivaut à la donnée :

- 1 - d'un ensemble de tâches
- 2 - d'un ensemble d'inégalités de potentiels représentant les gammes et la succession des tâches sur les machines.
- 3 - d'une relation d'équivalence entre les tâches telle que
 - a) deux tâches équivalentes sont de même nature (même durée, même logique d'exécution) mais exécutées sur des lots différents,
 - b) si une tâche débute en $\mathcal{G}_i$ sur un lot d'une pièce, en $\mathcal{G}_i + \theta$, $\mathcal{G}_i + 2\theta \dots$ des tâches équivalentes débiteront sur les lots suivants de la même pièce,
 - c) si une machine débute en $\mathcal{G}_i$ une opération i , en $\mathcal{G}_i + \theta$, $\mathcal{G}_i + 2\theta \dots$ elle débitera des opérations équivalentes à i .

.../

1.23 Intérêt de la périodicité de l'exécution des tâches

On adopte généralement un mode de fabrication périodique lorsque le plan de production spécifie une cadence. Or, il serait possible de traduire la cadence en une suite de délais et de choisir une méthode d'ordonnancement qui considère comme différentes les fabrications de deux lots d'une même pièce. Si une fabrication périodique est souvent plus séduisante, c'est qu'elle présente en particulier les avantages suivants :

- elle permet de poser clairement sinon de résoudre le problème du calcul de la taille des lots. Nous reviendrons sur ce point dans l'annexe 1.
- un lot étant terminé toutes les θ unités de temps, la quantité fabriquée est inversement proportionnelle à θ . La puissance d'un atelier c'est-à-dire le maximum qu'il peut produire correspond simplement au plus petit θ possible.
- la régulation des charges sur les machines est synonyme d'affectation des tâches aux machines (i.e : les temps d'attente entre deux opérations consécutives sur un même lot ne peuvent provoquer des sur ou sous charges momentanées).

1.24 Un premier modèle mathématique de fabrications périodiques

Ce modèle est un prolongement du modèle du paragraphe 1.12 pour les fabrications non périodiques. Il conduit à une classe de fabrications périodiques que nous allons caractériser à partir d'un exemple.

Soit la fabrication non périodique de deux pièces P et Q sur les machines T et F. Le graphe associé aux contraintes et le diagramme d'un système de potentiel sur ce graphe sont dessinés ci-dessous.

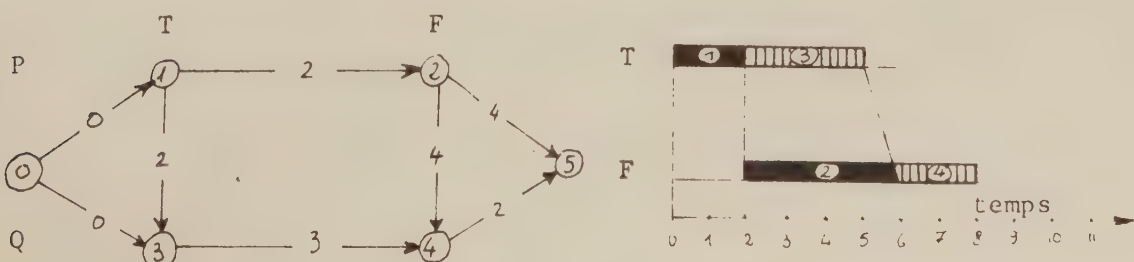


Figure 6

Le modèle étudié dans ce paragraphe suppose que la fabrication de plusieurs lots de P et Q est réalisée suivant un diagramme du type suivant :

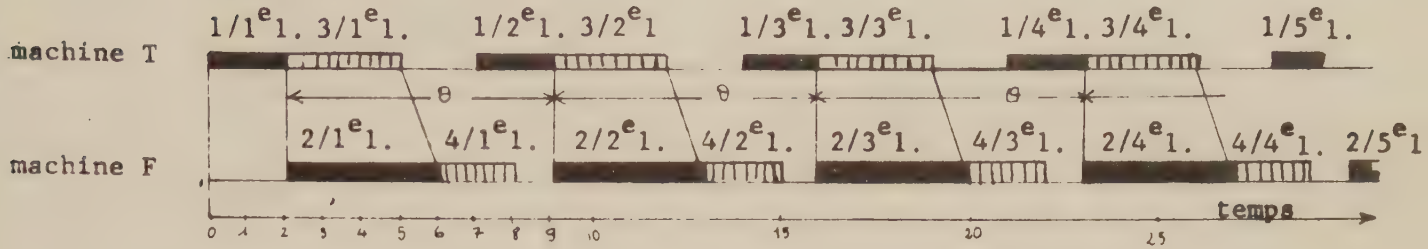


Figure 7

Les dates de début des lots 2, 3, ..., sont obtenues par translation de celles du premier lot. Ces translations ne sont pas quelconques car les premières tâches sur les lots $n + 1$ doivent succéder aux dernières tâches sur les lots n , ceci se traduit par des contraintes du type

$$\mathcal{C}_{1/2^e1.} \geq \mathcal{C}_{3/1^e1.} + d_3 \quad , \quad \mathcal{C}_{2/2^e1.} \geq \mathcal{C}_{4/1^e1.} + d_4$$

Ces contraintes paraissent très naturelles sur l'exemple donné, nous verrons ci-après qu'elles conduisent à l'exclusion de situations très intéressantes.

L'amplitude des translations représentées est un multiple de 7 unités de temps, elle ne pourrait être inférieure à un multiple de 6 puisque F est mobilisée pendant 6 unités de temps par l'usinage des lots de même rang. Au paragraphe suivant nous allons caractériser les systèmes de potentiels dont le diagramme peut être translaté d'une durée θ donnée.

1.24.1 Formulation mathématique de ce premier modèle, bilan des travaux à son sujet

Si $1_m, 2_m, \dots, e_m$ sont des tâches exécutées par la machine m et $\mathcal{C}_i^q$ les dates de début de ces tâches sur le q^{iem} lot, la contrainte sur les translations s'écrit $\mathcal{C}_{1_m}^{q+1} \geq \mathcal{C}_{e_m}^q + d_{em}$ soit

$$\mathcal{C}_{1_m}^q + \theta \geq \mathcal{C}_{e_m}^q + d_{em} \quad \text{ou} \quad \mathcal{C}_{1_m}^q - \mathcal{C}_{e_m}^q \geq d_{em} - \theta .$$

Cette contrainte est une inégalité de potentiel, elle peut être représentée sur le graphe de la fabrication du 1^e lot par un arc de d_{em} à lm de longueur $d_{em} - \theta$. Par suite, les systèmes de potentiels dont le diagramme peut être translaté de θ unités de temps sont des systèmes de potentiel sur un graphe du type suivant (Le graphe partiel en trait plein correspond à la fabrication d'un lot, les arcs en pointillés traduisent les contraintes sur les translations).

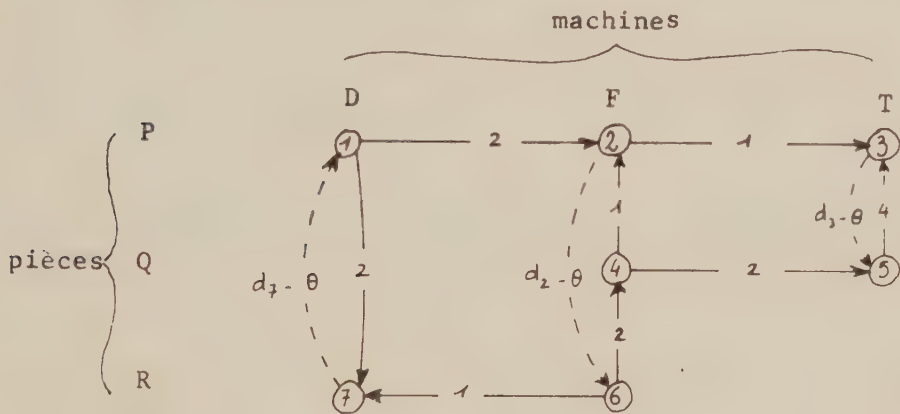


Figure 8

Remarque : En vertu de la proposition 1, θ est une période réalisable si et seulement si ce graphe n'a pas de circuits de longueur positive.

Ce premier modèle a été défini par B. ROY [2], R. CRUON et Ph. HERVE [4] puis L. NEMETI [10] ont élaboré un algorithme pour trouver le plus petit θ c'est-à-dire pour maximiser la production.

1.24.2 La situation qui a justifié le développement d'un modèle plus général

Considérons la fabrication périodique d'une pièce dont la gamme est représentée ci-dessous (les opérations 1 et 3 sont réalisées sur une machine T, 2 et 4 sont réalisées sur F.).

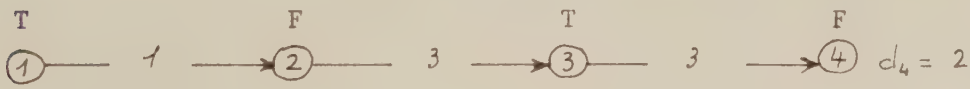
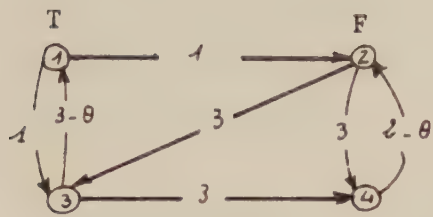
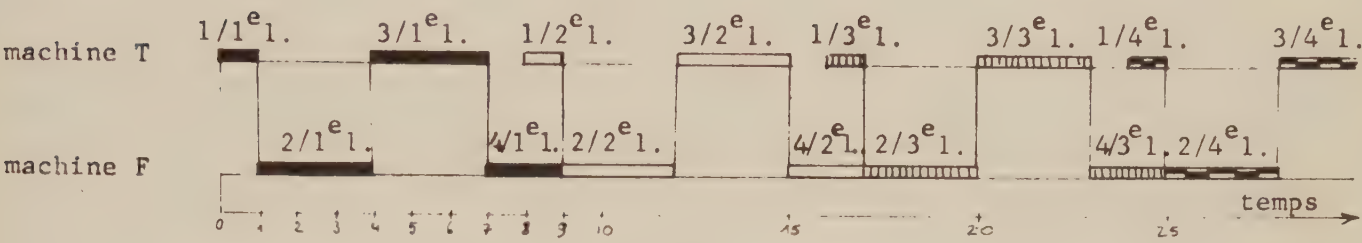


Figure 9

Le graphe et un diagramme associés au premier modèle sont dessinés ci-dessous

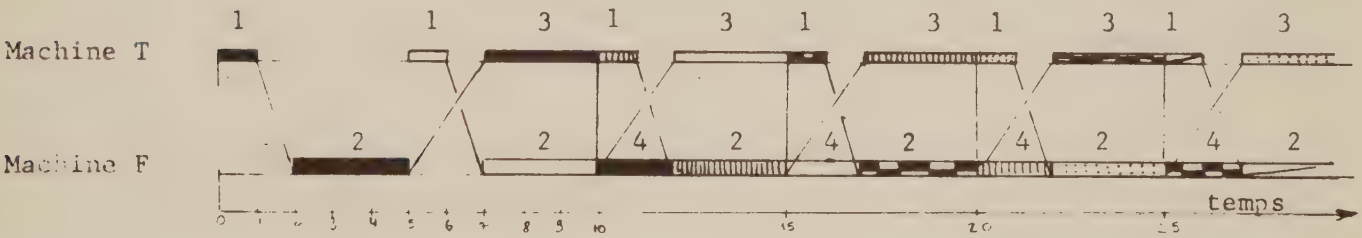


La période minimum est $\theta = 8$ car la longueur du circuit $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ est $3 + 3 + (2 - \theta)$.



Figures 10 et 11

On constate des temps d'attente importants sur les machines, or la fabrication de la même pièce aurait pu être menée avec une période de 5 unités de temps suivant le diagramme ci-dessous



- Légende
- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| tâche i sur le 1 ^{er} lot | tâche i sur le 4 ^e lot |
| tâche i sur le 2 ^e lot | tâche i sur le 5 ^e lot |
| tâche i sur le 3 ^e lot | tâche i sur le 6 ^e lot |

Figure 12

Dans ce dernier cas, on perd une unité de temps sur la machine T du fait que cette machine est moins chargée que F. ($d_1 + d_3 = 4$ alors que $d_2 + d_4 = 5$).

Cet exemple illustre l'inconvénient du modèle de fabrication périodique précédent, les machines peuvent présenter des inactivités systématiques (inacceptables en pratique) car la valeur de la période est étroitement liée à la topologie des sous graphes représentant les gammes et l'ordre sur les machines.

Nous verrons dans la deuxième partie que le modèle présenté ci-après permet de résorber cet inconvénient dans beaucoup de situations réelles :

lorsque les sous graphes représentant les gammes n'auront pas de circuit , la période sera uniquement liée à la charge des machines (i. e : à la somme des durées des tâches qu'une machine effectue pendant une période).

1.3 MODELE MATHEMATIQUE POUR LES FABRICATIONS PERIODIQUES

Nous venons de voir que la caractéristique d'une fabrication périodique est l'existence d'une relation d'équivalence $\sim$ sur l'ensemble des tâches telle que

- a) deux tâches équivalentes sont identiques mais exécutées sur des lots différents d'une même pièce,
- b) si une tâche i débute sur un lot d'une pièce en $\mathcal{C}_i$, en $\mathcal{C}_i + \theta$, $\mathcal{C}_i + 2\theta$, ... des tâches équivalentes à i débiteront sur les lots suivants de la même pièce,
- c) si une tâche i débute en $\mathcal{C}_i$ sur une machine, en $\mathcal{C}_i + \theta$, $\mathcal{C}_i + 2\theta$, ... cette machine commencera des tâches équivalentes à i .

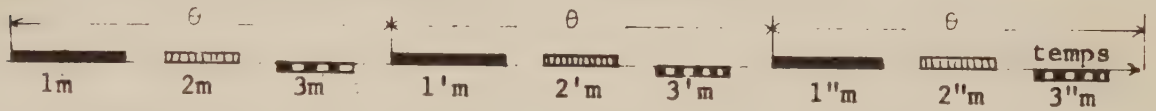
Le modèle qui va être établi résulte de l'écriture des contraintes conjonctives traduisant les gammes ou l'ordre des tâches sur les machines en fonction de deux représentants des classes d'équivalences associées à $\sim$,

- un représentant adapté à la traduction de l'ordre sur les machines,
- un représentant adapté à la traduction des gammes (i.e à la traduction de l'ordre des tâches sur un lot de pièces).

1.31 Choix de représentants adaptés à la traduction de l'ordre sur les machines

Soit $M = \{m\}$ l'ensemble des machines et $1m, 2m, \dots, em$ des tâches exécutées sur m pendant θ heures. Par définition en $\tau_{1m} + l\theta$, $\tau_{2m} + l\theta$, ..., $\tau_{em} + l\theta$ débiteront sur m des tâches équivalentes à $1m, 2m, \dots, em$. C'est donc que $1m, 2m, \dots, em$ sont des représentants des classes des tâches exécutées sur m .

Illustration : $1m, 2m, 3m$ sont les représentants des classes $\{1m, 1'm, 1'', \dots\}$, $\{2m, 2'm, 2''m, \dots\}$ et $\{3m, 3'm, 3''m, \dots\}$ dont la succession est représentée sur le diagramme suivant



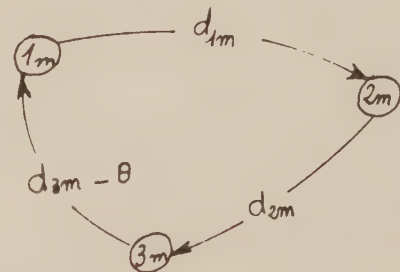
Les dates de début de ces représentants seront notées y , nous supposons que $1m$ est la première tâche exécutée par m ce qui équivaut à la contrainte $0 \leq y_{1m} < \theta$.

Pour l'exemple ci-dessus les autres contraintes sur les y sont :

$$y_{2m} - y_{1m} \geq d_{1m} > 0$$

$$y_{3m} - y_{2m} \geq d_{2m} > 0$$

$$y_{1m} - y_{3m} \geq d_{3m} - \theta$$



1.32 Choix de représentants adaptés à la traduction des gammes

Soit $G = \{ g \}$ l'ensemble des gammes et

$$1_g^0, 2_g^0, \dots, i_g^0, \dots, f_g^0; 1_g^1, 2_g^1, \dots, i_g^1, \dots, f_g^1; 1_g^l, \dots, i_g^l, \dots, f_g^l$$

les tâches effectuées sur des lots successifs (numérotés 0, 1, 2, ..., l) conformément à la gamme g.

L'hypothèse de périodicité de l'exécution des tâches entraîne

$$1_g^0 \sim 1_g^1 \sim \dots \sim 1_g^l; \dots; f_g^0 \sim f_g^1 \sim f_g^2 \sim \dots \sim f_g^l$$

En conséquence, des représentants de ces f classes peuvent être l'une quelconque des familles.

$$\{ 1_g^q, 2_g^q, \dots, i_g^q, \dots, f_g^q \}$$

Les dates de début de ces représentants seront notées t.

1.33. La relation entre "représentant machine" et "représentant gamme"

Nous fixerons q c'est-à-dire le lot qui subit les tâches "représentant gamme" en posant

$$t_{1g} = y_j \quad (j \sim 1g)$$

En d'autres termes, la première tâche $1g$ du lot choisi est réalisée pendant la période qui contient l'exécution des "représentant machine".

Pour les autres couples de représentants d'une même classe, par définition de $\sim$, la relation est :

$$i \sim j \iff t_i + k_i \theta = y_j \quad k_i \in \mathbb{Z}$$

1.34 Formulation mathématique complète du modèle

Des paragraphes précédents il résulte que pour N classes de tâches équivalentes, le modèle de fabrication périodique proposé comprend $3N - |G| + 1$ inconnues: (1)

$$\{t_i, y_j : i = 1, \dots, N, j \sim i, t_i, y_j \in \mathbb{R}\}; \{k_i : i \in N' = N - \{1_g : g \in G\}, k_i \in \mathbb{Z}\}$$

et $\theta \in \mathbb{R}$

Ces inconnues sont astreintes à trois types de contraintes

1/ des contraintes traduisant la périodicité

- a) $y_j = t_i + k_i \theta \quad i \sim j$ qui peut se décomposer en deux inégalités de potentiel : $y_j - t_i \geq k_i \theta$ et $t_i - y_j \geq -k_i \theta$
- b) $0 \leq y_{1g} < \theta$ ($0 \leq y_{1g} \leq \theta - \varepsilon$, ε réel positif arbitrairement petit)
- c) $t_{1g} = y_j \quad j \sim 1g \quad (i.e. : k_{1g} = 0)$

2/ des contraintes traduisant l'ordre des opérations sur un lot de pièces (gamme)

Les dates de début t_i des tâches exécutées sur un même lot de pièces doivent être un système de potentiel sur un graphe connexe ayant une base et antibase réduite à un sommet (notés respectivement fg et ig). Un tel graphe est représenté ci-dessous

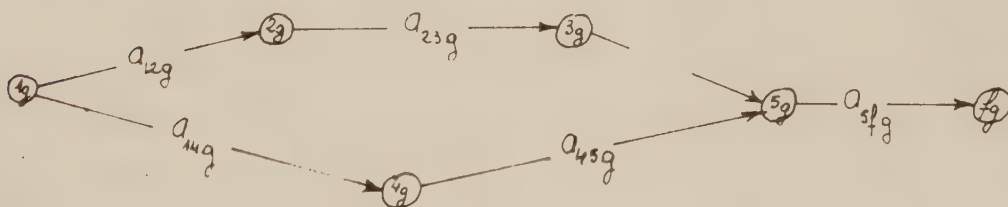


Figure 13

(1) $|G|$ est le cardinal de l'ensemble G des gammes.

3/ des contraintes traduisant l'ordre des opérations sur les machines

Les dates de début y_j des tâches représentant l'ordre sur une machine doivent être un système de potentiel sur un graphe fortement connexe. Ce graphe est déduit du graphe défini en 1.12 par l'adjonction d'un arc du sommet base (em) au sommet antibase (lm). La longueur de cet arc est $d_{em} - \theta$.

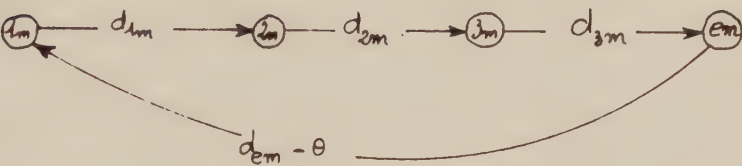


Figure 14

Dans la deuxième partie nous chercherons deux solutions de ces contraintes,

- 1/ une solution qui minimise θ
- 2/ une solution qui minimise une fonction linéaire des durées de fabrication

$$\sum \{ c(g) (t_{f_g} - t_{1_g}) : c(g) \geq 0 \quad g \in G \}$$

Le graphe représentant l'ensemble de ces contraintes à l'allure suivante :

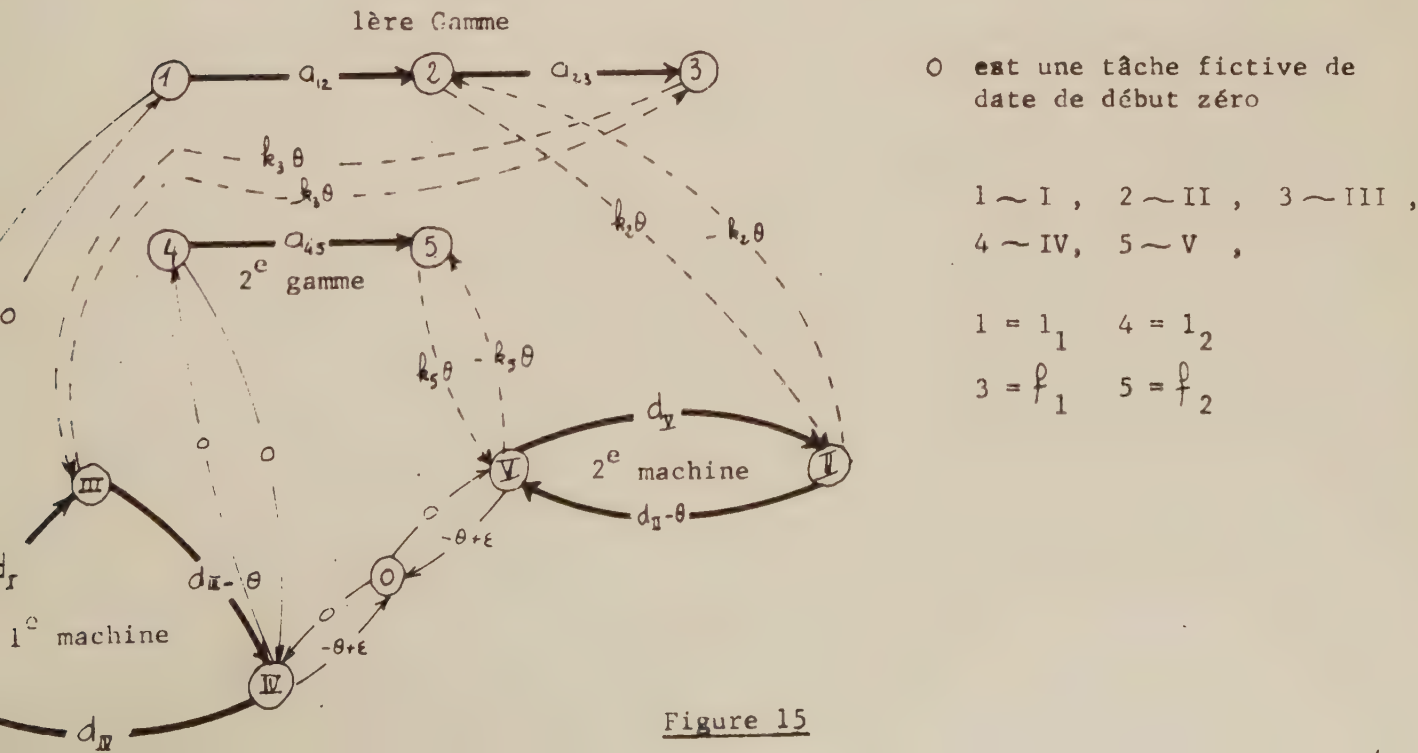


Figure 15

Ce graphe présente trois graphes partiels ou sous graphes remarquables.

- le graphe partiel Γ_θ associé aux données du problème, ses arcs correspondent aux contraintes conjonctives dont le second membre est fixé. Ils sont tracés ci-dessus en trait plein.

Lorsque des k_i , $i \in I \subset N'$ seront fixés, on notera $\Gamma_\theta(k_i : i \in I \subset N')$ le graphe déduit de Γ_θ par l'adjonction des arcs associés aux contraintes $t_i + k_i \theta = y_j$ $i \in I \subset N'$ $j \sim i$.

Et on appellera problème défini par $\Gamma_\theta(k_i : i \in I \subset N')$ la recherche des $\{k_i : i \in N' : i \notin I\}$, $\{t_i, y_j : i \in N' : j \sim i\}$.

- le sous graphe $\mathcal{G}$ (ou sous graphe des "gammes").

Ses sommets sont associés aux représentants "gammes", ils sont généralement indicés par i ou un chiffre arabe.

Ses arcs représentent les contraintes spécifiées par les gammes.

$\mathcal{G}$ a $|G|$ composantes connexes.

- le sous graphe $\mathcal{M}$ (ou sous graphe des "machines")

Ses sommets sont θ et les sommets associés aux représentants "machine" qui sont indicés par j ou un chiffre romain.

Ses arcs représentent les contraintes sur la succession des tâches sur les machines et $0 \leq y_{jm} < \theta \quad \forall m \in M$.

Le sous graphe $\mathcal{M}$ est fortement connexe.

Deuxième Partie

MOYENS D'ANALYSE ET DE RESOLUTION DU PROBLEME

Le modèle de fabrication périodique qui vient d'être défini est un programme linéaire mixte. Ce programme devient un système d'inégalités de potentiel lorsque les variables entières et la période sont fixées. Les moyens d'analyse et de résolution développés reflètent ces deux caractéristiques ; ils comprennent une méthode (P.S.E.P.) issue de la résolution des programmes linéaires mixtes et des conséquences de la théorie des systèmes de potentiels sur un graphe.

Mais la part de la théorie des potentiels est de loin majoritaire, la procédure S.E.P. intervient en dernier ressort lorsque les résultats issus de la théorie des potentiels ne sont pas suffisants pour construire une solution.

De manière plus précise,

- 1) il nous a paru utile de consacrer le premier paragraphe (2.1 PRELIMINAIRES) à la notion classique de plus long chemin entre deux sommets d'un graphe car elle intervient dans la quasi-totalité des développements ultérieurs. Deux résultats devraient illustrer son intérêt :
 - la proposition 4 qui montre comment on peut réduire la taille du problème lorsque certaines des variables entières sont fixées
 - la proposition 5 dont un corollaire est une condition nécessaire pour que le problème défini par Γ_0 ait une solution. Cette proposition est en quelque sorte la clef de voûte de la plupart de nos démonstrations
- 2) le second paragraphe (2.2 MINIMISATION DE LA PERIODE) contient un algorithme pour la recherche d'une solution. La convergence de cet algorithme est assurée (proposition 6) quand le sous graphe des gammes $\mathcal{g}$ n'a pas de circuit, dans ce cas le calcul de la période minimum est immédiat.

Ce paragraphe comprend, de plus, deux conséquences de la proposition 6

- la proposition 7 qui indique les conditions pour que l'ensemble des solutions du problème soit borné
- la proposition 8 qui montre comment on peut réduire la taille de certains problèmes d'optimisation d'une fonction des t_i

- 3) le troisième paragraphe (2.3 MINIMISATION DES EN COURS) traite essentiellement d'un algorithme pour cerner l'ensemble des solutions qui ont un coût d'en cours inférieur à un certain seuil. Lorsque l'ensemble de solutions obtenu n'est pas réduit à un point, il est exploré par une méthode du type S.E.P.
- 4) Enfin, le quatrième paragraphe (4.4 ASPECT INFORMATIQUE) donne quelques détails sur la programmation réalisée, plus particulièrement sur la représentation des graphes en mémoire. Ce n'est pas que cette programmation soit originale mais il nous paraît important de signaler les limites actuelles à la résolution pratique du problème, les méthodes et moyens qui devraient permettre de reculer ces limites.

2.1 DEFINITIONS ET RESULTATS PRELIMINAIRES

2.1.1 L'importance de la notion de plus long chemin, le graphe $\hat{g}$ associé à un graphe g .

La notion du plus long chemin est déjà apparue dans la proposition 1 : il existe un système de potentiel sur un graphe si et seulement si la longueur du plus long circuit est négative ou nulle, et dans la proposition 2 où il est question d'un système de potentiels minorant universel constitué des plus longs chemins d'une antibase aux sommets.

L'importance de cette notion est due à la propriété ci-dessous qui indique les contraintes sur les potentiels de deux sommets quelconques.

Proposition 3 : $l_{ii'}$ étant le plus long chemin du sommet i au sommet i' d'un graphe g , les potentiels $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_{i'}$ en ces deux sommets doivent vérifier

$$\mathcal{C}_{i'} - \mathcal{C}_i \geq l_{ii'}$$

Cette propriété est une conséquence immédiate de la proposition 1, l'exemple ci-dessous vise à concrétiser son contenu.

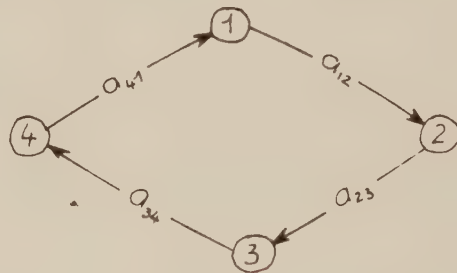
exemple : soit 4 inégalités de potentiel et le graphe associé.

$$\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1 \geq a_{12} \quad (1)$$

$$\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_2 \geq a_{23} \quad (2)$$

$$\mathcal{C}_4 - \mathcal{C}_3 \geq a_{34} \quad (3)$$

$$\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_4 \geq a_{41} \quad (4)$$



Les contraintes entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$ s'obtiennent en "ajoutant" (1), (2) et (3), (4) soit $\mathcal{C}_3 - \mathcal{C}_1 \geq a_{12} + a_{23} = l_{13}$, $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_3 \geq a_{34} + a_{41} = l_{31}$.

Les contraintes précisées par la proposition 3 sont des inégalités de potentiel. On peut donc leur associer un graphe $\hat{g}$ qui a les mêmes sommets que g et dont la longueur de l'arc de i à i' est $l_{ii'}$.

(note : lorsqu'il n'existe pas de chemin de i à i' dans g on pose $l_{ii'} = -\infty$. Lorsque le chemin de i à i' passe par des sommets d'un circuit de longueur positive $l_{ii'} = +\infty$, en particulier si i est un sommet d'un circuit de longueur positive ($l_{ii} = +\infty$), $\hat{g}$ porte en i une boucle de longueur $+\infty$).

.../

exemple

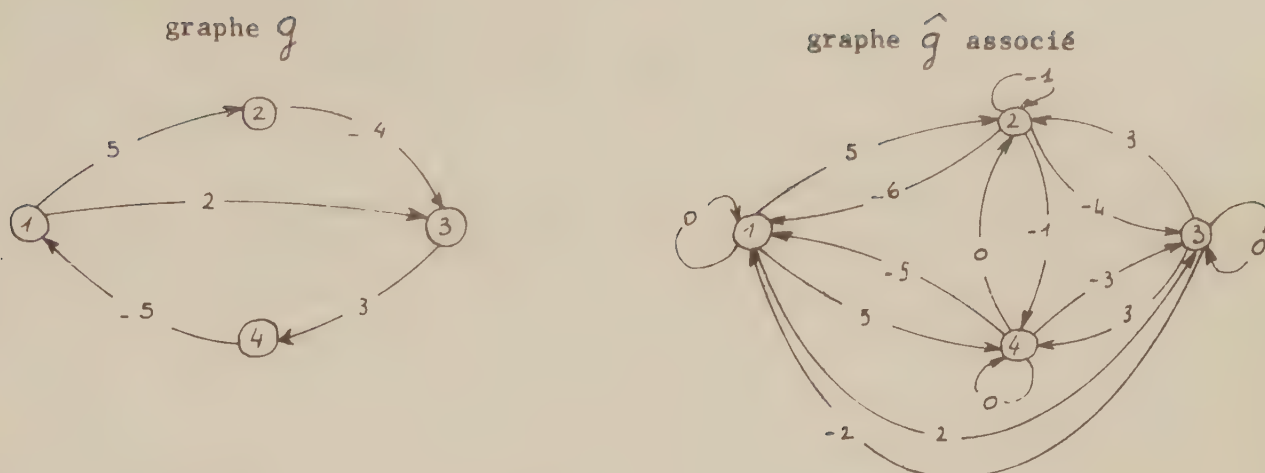


Figure 16

Il est commode de travailler sur $\hat{g}$ plutôt que sur g chaque fois que les inconnues sont les potentiels d'une partie seulement des sommets de g ou bien la longueur de certains arcs. Nous allons voir un premier exemple d'une telle situation dans le paragraphe suivant.

2.12 Un premier intérêt des graphes $\hat{\Gamma}_\theta$ pour la résolution du modèle de fabrication périodique

Supposons que les inconnues k_i , $i \in I \subset N'$ soient fixées aux valeurs $\bar{k}_i$, $i \in I$ et appelons

- $\delta_{\theta, N-I}$ le sous graphe de $\hat{\Gamma}_\theta(\bar{k}_i, i \in I \subset N)$ défini par les sommets $\{i, j : i \notin I, j \sim i\}$
- problème défini par $\delta_{\theta, N-I}$ la recherche d'inconnues $\{t_i^\theta, y_j^\theta, k_i^\theta : i \notin I, j \sim i\}$ satisfaisant les contraintes conjonctives représentées par $\delta_{\theta, N-I}$ et $\{y_j^\theta = t_i^\theta + k_i^\theta \theta, i \notin I, j \sim i\}$.

D'après la proposition 1, le problème défini par $\Gamma_\theta(\bar{k}_i, i \in I \subset N)$ a une solution si et seulement si il existe $\{\bar{k}_i, i \notin I\}$ tel que

$\Gamma_\theta(\bar{k}_i, i \in I, \bar{k}_i, i \notin I)$ n'a pas de circuit de longueur positive. De même $\{\bar{k}_i^\theta, i \notin I\}$ est solution du problème défini par $\delta_{\theta, N-I}$ si $\delta_{\theta, N-I}(\bar{k}_i^\theta, i \notin I)$ n'a pas de circuit de longueur positive

Ceci posé, on a la

Proposition 4 Si $\{\bar{k}_i^\theta, i \notin I\}$ est solution du problème associé à $\delta_{\theta, N-I}$, $\{\bar{k}_i, i \in I, \bar{k}_i^\theta, i \notin I\}$ est solution du problème défini par Γ_θ .

Corollaire Le problème défini par $\Gamma_\theta(\bar{k}_i, i \in I \subset N)$ a une solution si et seulement si le problème défini par $\delta_{\theta, N-I}(\bar{k}_i^x, i \in I)$ a une solution.

Démonstration de la proposition 4

Nous allons montrer que si $\Gamma_\theta(\bar{k}_i, i \in I, \bar{k}_i^x, i \notin N)$ a un circuit de longueur positive, il en est de même pour $\delta_{\theta, N-I}(\bar{k}_i^x, i \in I)$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Premier cas: Le circuit de longueur positive C de $\Gamma_\theta(\bar{k}_i, i \in I, \bar{k}_i^x, i \notin N)$ est entièrement contenu dans $\Gamma_\theta(\bar{k}_i, i \in I)$.

Si ce circuit passe par le sous graphe des machines $\mathcal{M}$, du fait que $\mathcal{M}$ est fortement connexe tous les sommets $j : j \sim i, i \in I$ de $\delta_{\theta, N-I}$ portent une boucle de longueur $+\infty$

Si C ne passe pas par $\mathcal{M}$ il emprunte uniquement des sommets $i \in I$. Car tout $i \in I$ étant un sommet du circuit représentant la contrainte $t_i + \bar{k}_i \theta = y_j$ ($t_i - y_j > -\bar{k}_i \theta$, $y_j - t_i > \bar{k}_i \theta$) s'il existait un circuit de longueur positive passant par $i \in I$ il existerait un circuit de longueur positive passant par $j \sim i$. En conséquence tous les sommets de C sont des sommets de $\delta_{\theta, N-I}$, ils portent dans $\delta_{\theta, N-I}$ une boucle de longueur $+\infty$

Deuxième cas : C emprunte un arc joignant deux sommets équivalents i et j, $i \in I$

$\delta_{\theta, N-I}(\bar{k}_i^x, i \notin I)$ a un circuit de même longueur que C puisque le plus long chemin joignant deux sommets, équivalents ou non, de

$\{i, j, i \notin N, j \sim i\}$ dans $\Gamma_\theta(\bar{k}_i, i \in I)$ est représenté par un arc de même longueur dans $\delta_{\theta, N-I}$.

Lors de la résolution pratique du problème, la proposition 4 permet des gains importants en taille mémoire et temps ordinateur car, dès qu'un $\bar{k}_i$ est fixé, on peut réduire l'ordre de la matrice associée au graphe de deux unités (cf 2.4 Aspects Informatiques)

2.13 Une conséquence de la proposition 1 qui est fondamentale pour les démonstrations ultérieures

Soit un graphe $\Gamma_\theta G$ (Γ_θ Généralisé) admettant Γ_θ comme graphe partiel.

Dans la suite $\Gamma_\theta G$ pourra être :

- $\Gamma_\theta (\bar{k}_i \ i \in I \subset N')$, les $\bar{k}_i$ étant des constantes
- Γ_θ augmenté d'arcs associés aux contraintes

$$y_j - t_i \geq k_i \theta \quad \text{et} \quad t_i - y_j \geq k_j \theta \quad i \in N' \quad k_i, k_j \in \mathbb{Z}$$

Ces contraintes traduisent que k_i doit appartenir à l'intervalle $[k_i, -k_j]$.

- Γ_θ augmenté d'arcs associés aux contraintes

$$t_{fg} - t_{ig} \leq b_g \quad g \in G$$

Ces contraintes traduisent que les durées de fabrication sont bornées par $b_g + d_{fg}$.

Nous dirons que les sommets i_0 et j_0 $i_0 \sim j_0$ de $\Gamma_\theta G$ peuvent être liés par l'entier relatif $\bar{k}_{i_0}$ si le système d'inégalités de potentiel défini par $\Gamma_\theta G$ augmenté de $t_{i_0} + \bar{k}_{i_0} \theta = y_{j_0}$ admet une solution.

En d'autres termes si $\Gamma_\theta G$ muni d'un arc de i_0 à j_0 de longueur $\bar{k}_{i_0} \theta$ et d'un arc de j_0 à i_0 de longueur $-\bar{k}_{i_0} \theta$ n'a pas de circuit de longueur positive.

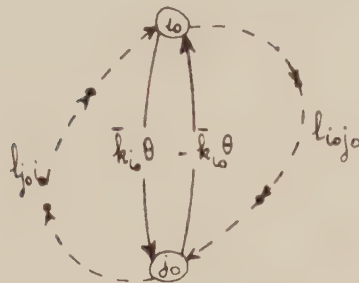
Cette définition permet d'énoncer la

Proposition 5 Une condition nécessaire et suffisante pour lier deux sommets i_0 et j_0 $i_0 \sim j_0$ d'un graphe $\Gamma_\theta G$ par un entier relatif $\bar{k}_{i_0}$ est que :

$$l_{i_0 j_0} \leq \bar{k}_{i_0} \theta \leq -l_{j_0 i_0}$$

($l_{i_0 j_0}$ et $l_{j_0 i_0}$ sont les longueurs des plus longs chemins de i_0 à j_0 et de j_0 à i_0 dans $\Gamma_\theta G$)

La démonstration réside dans l'application de la proposition 1 au sous graphe partiel de $\Gamma_\theta G$ défini par i_0 et j_0 , les sommets et les arcs du plus long chemin de i_0 à j_0 et de j_0 à i_0 dans $\Gamma_\theta G$



on écrit que ce graphe n'a pas de circuit de longueur positive quand on lui ajoute les arcs en traits pleins si

$$l_{i_0 j_0} - \bar{k}_{i_0} \theta \leq 0 \text{ et } l_{j_0 i_0} + \bar{k}_{j_0} \theta \leq 0$$

Corollaire Le système de contraintes défini par $\Gamma_\theta G$ et

$\{ t_i + k_i \theta = y_j \mid i \in N' \}$ aura une solution $\{ \bar{t}_i, \bar{y}_j, \bar{k}_i \}$ seulement si

$$\forall i \quad E^+(l_{ij} / \theta) \leq E^-(l_{ji} / \theta)$$

$E^+(x)$ et $E^-(x)$ étant les parties entières par excès et par défaut de x .

2.2 MINIMISATION DE LA PERIODE

Le titre de ce paragraphe rend uniquement compte de son principal intérêt : la proposition 6 qui apporte une solution au problème de la minimisation de θ quand le sous graphe des gammes $\mathcal{g}$ n'a pas de circuit.

En fait, ce paragraphe contient de plus des conséquences de la proposition 6 qui sont totalement étrangères à la minimisation de θ :

- la proposition 7 est une C.N.S. pour que l'ensemble des solutions du problème défini par Γ_θ soit borné.
- la proposition 8 indique un moyen pour réduire la taille d'un problème d'optimisation d'une fonction des t_i $i \in I$ quand I n'est qu'un sous ensemble de N .

"Minimiser" la période consiste à trouver le plus petit θ tel que le problème défini par Γ_θ ait une solution.

Dans le cas où N' est réduit à un élément i_0 , d'après la proposition 5 un quelconque entier relatif de l'intervalle $[\ell_{i_0 j_0} / \theta, -\ell_{j_0 i_0} / \theta]$ est une solution du problème. Plus généralement on peut tenter de résoudre le cas $|N'| > 1$ par 1'

Algorithme 1

étape 1

$l_{ii'}$ étant le plus long chemin de i à i' dans Γ_θ ,

- si $\forall i \in N' \quad E^+(\ell_{ij} / \theta) \leq E^-(\ell_{ji} / \theta)$ on choisit $i_1 \in N'$
et $\bar{k}_{i_1} \in [\ell_{i_1 j_1} / \theta, -\ell_{j_1 i_1} / \theta] \quad \bar{k}_{i_1} \in \mathbb{Z} \quad j_1 \sim i_1$

On passe à l'étape 2 avec $I_1 = \{i_1\}$

- si $\exists i$ tel que $E^+(\ell_{ij} / \theta) > E^-(\ell_{ji} / \theta)$ le problème défini par Γ_θ n'a pas de solution.

étape q

$l_{ii'}^{q-1}$ étant le plus long chemin de i à i' dans $\Gamma_\theta (\bar{k}_i \ i \in I_{q-1})$,

- si $\forall i \in N' - I_{q-1} \quad E^+(\ell_{ij}^{q-1} / \theta) \leq E^-(\ell_{ji}^{q-1} / \theta)$ on choisit $i_q \in N' - I_{q-1}$ et $\bar{k}_{i_q} \in [\ell_{i_q j_q}^{q-1} / \theta, -\ell_{j_q i_q}^{q-1} / \theta] \quad \bar{k}_{i_q} \in \mathbb{Z}, j_q \sim i_q$

On passe à l'étape $q + 1$ avec $I_q = I_{q-1} \cup \{i_q\}$

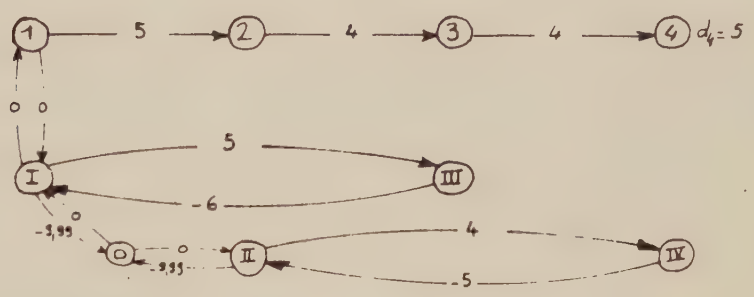
- si $\exists i \in N' - I_{q-1}$ tel que $E^+(\ell_{ij}^{q-1} / \theta) > E^-(\ell_{ji}^{q-1} / \theta)$

le problème défini par $\Gamma_\theta (\bar{k}_i : i \in I_{q-1})$ n'a pas de solution. Ceci provient du choix malheureux d'un $\bar{k}_i$ à une étape antérieure, à moins que le problème défini par Γ_θ n'ait pas de solution.

Exemples d'application de l'algorithme 1

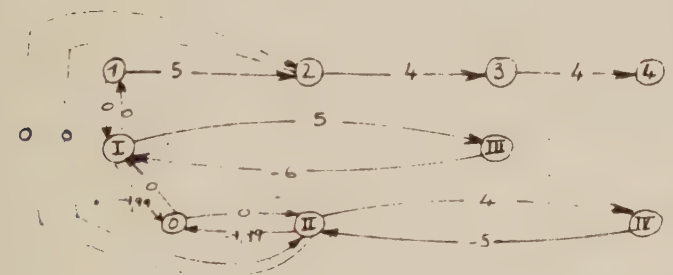
Données du problème,
graphe Γ_θ , $\theta = 10$

Figure 17

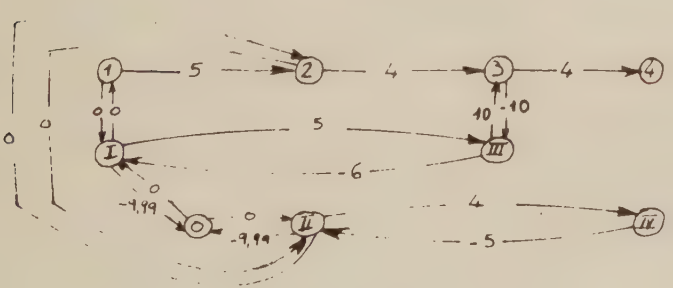


Premier cas : on tente de déterminer les $\bar{k}_i$ dans l'ordre 2, 3, 4

Sur Γ_θ , $l_{2I} = -\infty$ et $l_{I2} = -4,99$
d'où $k_2 \leq (4,99/10)$ on choisit $\bar{k}_2 = 0$



Sur $\Gamma_\theta (\bar{k}_2 = 0)$ ci-dessus, $l_{3II} = -\infty$ et $l_{II3} = 3$
d'où $k_3 \leq (-3/10)$ on choisit $\bar{k}_3 = -1$



Sur $\Gamma_\theta (\bar{k}_2 = 0, \bar{k}_3 = -1)$ ci-dessus $l_{4II} = -\infty$
et $l_{II4} = 3,99$ d'où $k_4 \leq (-3,99/10)$
on choisit $\bar{k}_4 = -1$

On trouve une solution

Deuxième cas : on tente de déterminer les $\bar{k}_i$ dans l'ordre 4, 2, 3

Sur Γ_θ , $l_{4IV} = -\infty$ et $l_{IV4} = -1,99$
d'où $k_4 \leq (1,99/10)$ on choisit $\bar{k}_4 = 0$

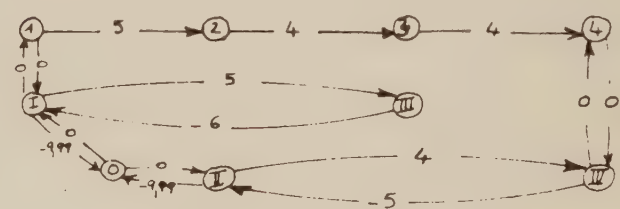


Fig 20

Sur $\Gamma_\theta (\bar{k}_4 = 0)$ ci-dessus $l_{2I} = 3$, $l_{I2} = -4,99$
on ne peut trouver $\bar{k}_2$ puisque $E^+(3/10) > E^-(4,99/10)$

On ne trouve pas de solution

Quand le sous graphe des gammes n'a pas de circuit la démonstration de la proposition 6 suivante montre qu'il est toujours possible de fixer les k_i dans un ordre tel que l'algorithme 1 conduise à une solution.

Proposition 6 :

$$\left[\begin{array}{l} 1) \text{ le graphe } \Gamma_\theta \text{ n'a pas de circuit de} \\ \text{longueur positive} \\ 2) \mathcal{G} \text{ n'a pas de circuit} \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{le problème défini par } \Gamma_\theta \\ \text{a une solution} \end{array} \right]$$

Démonstration (construction d'une solution au moyen de l'algorithme 1)

Cette démonstration comprend deux phases, tout d'abord on définit un ordre sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$ puis on montre que l'algorithme 1 conduit à une solution si les k_i sont calculés suivant cet ordre..

1) rangement des sommets de $\mathcal{G}$

Le sous graphe des gammes n'ayant pas de circuit il est possible (cf (1) (2)) de ranger ses sommets de manière que :

$\exists$ un chemin de i à i' $i \neq i'$ dans $\mathcal{G} \Rightarrow \text{rang}(i) < \text{rang}(i')$

Un moyen pour déterminer un ordre satisfaisant cette propriété est de construire un système de potentiels entiers sur un graphe topologiquement identique à $\mathcal{G}$ dont tous les arcs sont de longueur 1.

exemple de rangement des sommets de $\mathcal{G}$

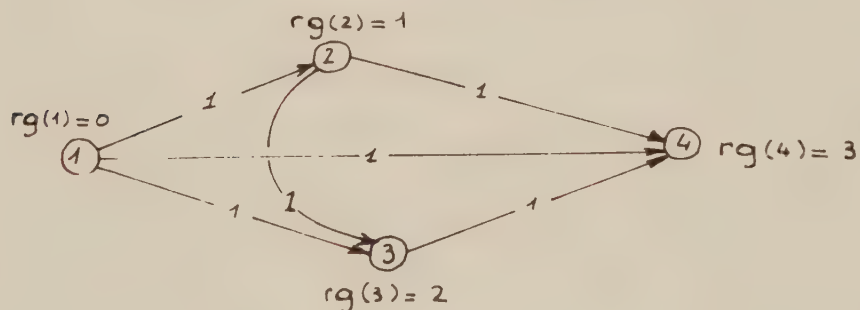


Figure 21

2) l'algorithme 1 conduit à une solution si les $\bar{k}_i$ sont calculés suivant un tel ordre.

Remarquons tout d'abord une propriété de Γ_θ : $l_{ij} = -\infty \quad \forall i \in N'$. Cette propriété résulte des trois points suivants :

- les seuls arcs du graphe Γ_θ qui relient un sommet de $\mathcal{G}$ et un sommet de $\mathcal{M}$ sont les arcs associés aux contraintes $t_{1g} = y_j \quad j \sim 1g \quad g \in G$
- les sommets $\{1g : g \in G\}$ constituent une antibase de $\mathcal{G}$
- $\mathcal{G}$ n'a pas de circuit.

Plus généralement, à l'étape $q + 1$ de l'algorithme 1 $\Gamma_\theta(\bar{k}_i \quad i \in I_q)$ vérifie $\forall i \in N' - I_q \quad E^+(l_{ij}^q / \theta) \leq E^-(l_{ji}^q / \theta) \quad \text{car} \quad l_{ij}^q = -\infty$.

En effet

$\bar{k}_{i'}$ fixé $\Rightarrow \text{rang}(i') \leq \text{rang}(i) \Rightarrow \nexists$ de chemin de i à i' dans $\mathcal{G}$

Or les seuls arcs entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{M}$ sont associés aux contraintes

$$t_{i' + \bar{k}_{i'}, \theta} = y_{j'} \quad i' \in I_q \cup \{1g : g \in G\} \quad j' \sim i'$$

2.21 Une première conséquence de la proposition 6 :

la détermination du θ minimum lorsque $\mathcal{G}$ n'a pas de circuit

D'après la proposition 6, θ est le plus petit nombre réel tel que Γ_θ n'ait pas de circuit de longueur positive.

Par définition de Γ_θ (1.34) cette condition est réalisée si chacun des sous graphes associés à l'ordre sur une machine n'a pas de circuit de longueur positive. Or, ces graphes sont obtenus en traçant un arc de longueur $d_{e_m} - \theta$ de la base e_m à l'antibase 1_m d'un graphe connexe, $\theta - d_{e_m}$ doit donc être supérieur à la longueur du plus long chemin de 1_m à e_m du sous graphe associé à m .

Le plus souvent les machines considérées n'exécutent pas deux tâches simultanément, on a alors la relation

$$\text{minimum} \quad (\theta) = \max_m (d_{1_m} + d_{2_m} + \dots + d_{e_m})$$

θ dépend uniquement de l'affectation des tâches aux machines.

2.22 Une deuxième conséquence de la proposition 6

Proposition 7 : Une condition nécessaire et suffisante pour que que l'ensemble des solutions du problème défini par Γ_θ soit borné est que les composantes connexes de $\mathcal{G}$ soient fortement connexes.

(rappel : a) une solution du problème défini par Γ_θ est un jeu de valeurs pour les inconnues $\{t_i, y_j : i \in N, j \sim i\}$ et $\{k_i : i \in N', k_i \in \mathbb{Z}\}$

b) la composante connexe g de $\mathcal{G}$ représente les contraintes d'une gamme)

Démonstration

- 1) Si l'ensemble des solutions partielles $\{\bar{k}_i : i \in N'\}$ est borné, l'ensemble des solutions est borné

Ceci résulte des deux propriétés suivantes :

- si l'ensemble des solutions partielles $\{\bar{k}_i : i \in N'\}$ est borné il comprend un nombre fini de points.
- le graphe $\Gamma_\theta(\bar{k}_i : i \in N')$ étant fortement connexe, d'après la proposition 2, l'ensemble des systèmes de potentiels en ses sommets est un treillis complet pour les relations vectorielles sup et inf.

- 2) Si les composantes connexes de $\mathcal{G}$ sont fortement connexes l'ensemble des solutions partielles $\{\bar{k}_i : i \in N'\}$ est borné

Par définition de Γ_θ si les composantes connexes de $\mathcal{G}$ sont f-connexes, Γ_θ est f-connexe et les plus longs chemins ℓ_{ij} et ℓ_{ji} de i à j et de j à i sont finis. En vertu de la proposition 5

$$\forall i \quad \bar{k}_i \in [\ell_{ij}/\theta, \ell_{ji}/\theta]$$

- 3) Si une composante connexe de $\mathcal{G}$ n'est pas f-connexe l'ensemble des solutions partielles $\{\bar{k}_i : i \in N'\}$ n'est pas borné

Dans le cas où $\mathcal{G}$ n'a pas de circuit il ressort de la démonstration de la proposition 6 que $\bar{k}_i$ peut prendre une infinité de valeurs. (à l'étape q de l'algorithme 1 $\bar{k}_q$ peut prendre n'importe quelle valeur entière inférieure à $-\ell_{jq}^{q-1}/\theta$).

Pour établir l'implication 3) dans le cas général nous avons besoin de deux définitions :

Définition 2 : Une composante f-connexe d'un graphe est une classe d'équivalence induite sur l'ensemble des sommets par la relation :
 $i \equiv i' \iff i = i'$ ou bien il existe un circuit contenant ces deux sommets.

Définition 3 : Le graphe réduit Q^R d'un graphe Q est un graphe dont
 1) les sommets correspondent aux composantes f-connexes de Q , ces sommets seront notés $I^\alpha \quad \alpha \in A$
 2) il existe un arc de I^α à $I^{\alpha'}$ s'il existe dans Q un arc de $i \in I^\alpha$ à $i' \in I^{\alpha'}$.

Une conséquence immédiate de la définition 3 est que Q^R n'a pas de circuit, nous supposons que ses sommets sont rangés dans ordre jouissant de la propriété :

$$\exists \text{ un chemin de } I^\alpha \text{ à } I^{\alpha'} \Rightarrow \alpha < \alpha'$$

L'implication 3) est une conséquence de la

Proposition 8 : Soit

- $\{I^\alpha : \alpha \in A\}$ l'ensemble des sommets de Q^R (i.e l'ensemble des composantes f-connexes de Q)
- $\alpha(i)$ le numéro de la composante f-connexe du sommet i de Q
- $\{R^{\alpha(i)} : i \in N'\}$ un ensemble de nombres entiers relatifs tels que
 - 1) $R^{\alpha(i)} \leq 0$
 - 2) $R^{\alpha(i)} = 0$ si $\exists g : \alpha(i) = \alpha(1_g)$
 - 3) $R^\alpha \leq R^{\alpha'}$ si $\alpha' \leq \alpha$

On a l'implication :

$$\{\bar{k}_i : i \in N'\} \text{ solution du problème défini par } \Gamma_0 \\ \implies \{\bar{k}_i + R^{\alpha(i)} : i \in N'\} \text{ est solution du problème défini par } \Gamma_0.$$

Démonstration

Les circuits de $\Gamma_0(\bar{k}_i + R^{\alpha(i)})$ passant par des sommets de Q et de m empruntent autant de fois des arcs du type " j à i ($j \sim i$) de longueur $-(\bar{k}_i + R^{\alpha(i)})$ " que des arcs du type " i à j ($j \sim i$) de longueur $(\bar{k}_i + R^{\alpha(i)})$ ". Soit un de ces circuits : C , du fait de la numérotation des sommets de Q^R ($\ell_{I^\alpha I^{\alpha'}} > -\infty \Rightarrow \alpha' > \alpha$) C peut être défini par une suite de couples de sommets :

$$C = \{i_r, j_r : i_r \sim j_r ; \alpha(i_r) \leq \alpha(i_{r+1}) ; r = 1, \dots, p\}$$

et sa longueur peut s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \{ -(\bar{k}_{i_r} + R^{\alpha(i_r)})\theta + l_{i_r j_r}^g + (\bar{k}_{i_{r+1}} + R^{\alpha(i_{r+1})})\theta + l_{j_{r+1} j_{r+2}}^m : r = 1 \dots p-1, j_{p+1} = j_1 \} \\ l^g \text{ est la longueur d'un chemin entièrement contenu dans } g \\ l^m \text{ est la longueur d'un chemin entièrement contenu dans } m \end{array} \right.$$

Exemple de circuit C

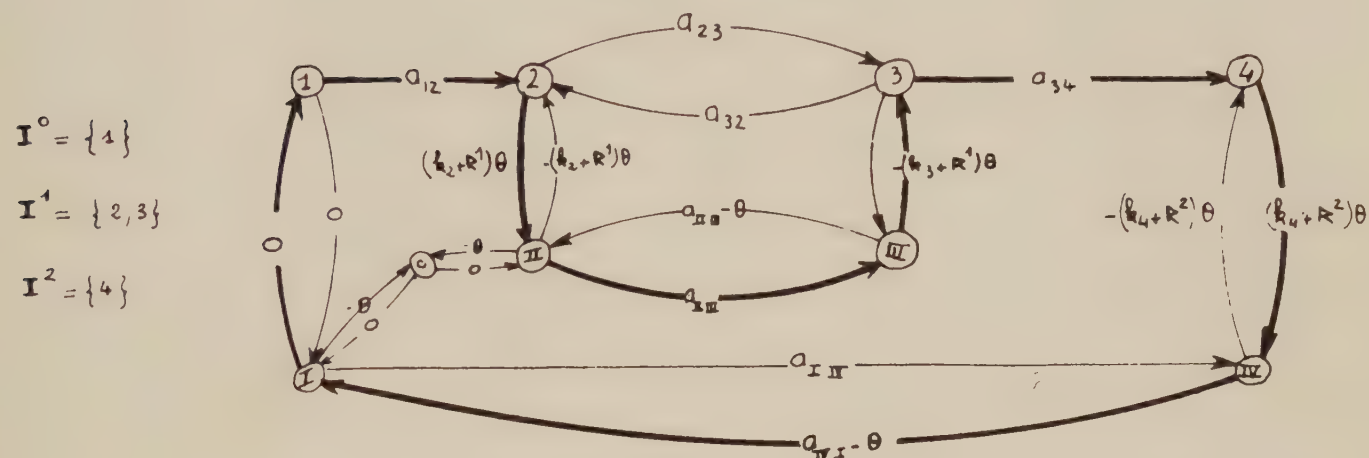


Figure 22 . C est tracé en traits forts

La longueur de C n'est pas positive car

$$1) \alpha(i_r) \leq \alpha(i_{r+1}) \Rightarrow -R^{\alpha(i_r)} + R^{\alpha(i_{r+1})} \leq 0 \text{ par hypothèse}$$

$$2) \{\bar{k}_i, i \in N'\} \text{ solution} \Rightarrow \sum_r \{ -\bar{k}_{i_r} \theta + l_{i_r j_r}^g + \bar{k}_{i_{r+1}} \theta + l_{j_{r+1} j_{r+2}}^m \} \leq 0$$

2.23 Troisième conséquence de la proposition 6

Il s'agit à nouveau d'un problème défini par Γ_θ dont g n'a pas de circuit. On se propose de chercher la solution de ce problème qui "optimise" une fonction des $t_i, i \in I$.

Si les sommets de g sont rangés dans un ordre tel que

$$\text{rang}(i) < \text{rang}(i') \Rightarrow l_{ii'} > -\infty$$

$$\text{et que } \Delta(I) = \{i' : \exists i \in I \text{ tel que } \text{rang}(i') < \text{rang}(i)\}$$

de la même manière que pour démontrer la proposition 6, on peut établir que toute solution partielle $\{\bar{k}_i, i \in \Delta(I)\}$ peut être complétée par des $\{\bar{k}_i, i \notin \Delta(I)\}$ pour former une solution du problème défini par Γ_θ .

Cette propriété conduit à la

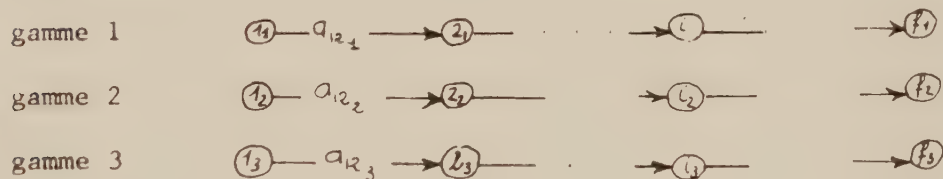
Proposition 8 : L'optimum d'une fonction des t_i $i \in I$ du problème défini par Γ_θ est égal à l'optimum de la même fonction pour le problème défini par le sous graphe $\delta_{\theta, \Delta(I)}$ de $\widehat{\Gamma}_\theta$ dont les sommets sont les $\{i, j : i \in \Delta(I) \quad j \sim i\}$

Démonstration

En vertu de la propriété ci-dessus il nous suffit de montrer que toute solution $\{\bar{k}_i^x \quad i \in \Delta(I)\}$ du problème défini par $\delta_{\theta, \Delta(I)}$ est telle que $\Gamma_\theta(\bar{k}_i^x \quad i \in \Delta(I))$ n'a pas de circuit de longueur positive. Or, les plus longs chemins de $\widehat{\Gamma}$ liant des sommets de $\{i, j : i \in \Delta(I) \quad j \sim i\}$ sont représentés par des arcs de même longueur dans $\delta_{\theta, \Delta(I)}$, si ajouter les arcs associés à $t_i + \bar{k}_i^x \theta = y_j \quad i \in \Delta(I)$ créait des circuits de longueur positive dans Γ_θ il en serait de même pour $\delta_{\theta, \Delta(I)}$

Exemple d'application de cette propriété

Dans de nombreux problèmes pratiques, le sous graphe des gammes est composé de $|G|$ chemins :



La détermination du minimum de la durée de fabrication d'un seul lot $(t_{fg} + d_{fg} - t_{1g})$ peut être conduite à partir du sous graphe de $\widehat{\Gamma}_\theta$ défini par les sommets

$$\{i, j : i \text{ sommet associé à une tâche de } g, \quad j \sim i\}$$

La taille de ce problème est donc considérablement réduite

(note : nous verrons en 2.4 (Aspects informatiques) que la construction de $\widehat{\Gamma}_\theta$ est un problème mineur).

2.3 MINIMISATION DES EN COURS

Il s'agit de trouver une solution du problème défini par Γ_0 qui minimise une fonction des durées de fabrication :

$$\mathcal{E} = \sum \{ c_g (t_{fg} - t_{ig}) : c_g \geq 0 \quad g \in G \}$$

Pour résoudre ce problème on introduit de nouvelles variables : $b_g = t_{fg} - t_{ig}$ et les inégalités de potentiels associées :

$$t_{fg} - t_{ig} \geq b_g \quad \text{et} \quad t_{ig} - t_{fg} \geq -b_g \quad g \in G$$

Ceci afin que la résolution comprenne deux phases indépendantes :

- 1) la détermination de la longueur ($\pm k_i \theta$ et $\pm b_g$) des arcs associés aux contraintes $y_j - t_i = k_i \theta$ et $t_{fg} - t_{ig} = b_g$ de manière que
 - Γ_0 augmenté de ces arcs n'ait pas de circuit de longueur positive
 - $\sum \{ c_g b_g : g \in G \}$ soit minimum
- 2) la détermination des $\{ t_i, y_j \}$ c'est-à-dire d'un système de potentiel sur le graphe défini dans la 1^{ère} phase. Cette deuxième phase ne sera pas considérée car elle est résolue par les propositions 1 et 2.

2.31 Principe de la méthode de résolution

La méthode consiste en la recherche d'un ensemble d'intervalles

$$\{ [K_i, -K_j] \quad i \in N', K_i, K_j \in \mathbb{Z} \} \quad \text{et} \quad \{ [B_{fg}, -B_{fg}] \quad g \in G, B_{fg}, B_{fg} \in \mathbb{R} \}$$

contenant toutes les solutions $\{ \bar{k}_i \quad i \in N' \}$ et $\{ \bar{b}_g \quad g \in G \}$ meilleures qu'une solution donnée de valeur $\mathcal{E}_{sup}$.

Quand le domaine défini par ces intervalles est réduit à un point, ce point est l'optimum cherché. Sinon ce domaine est exploré par une procédure du type S.E.P.

Il est à remarquer que si B_{fg} est borné, ce qui sera toujours le cas lorsque $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{sup}$, le graphe G est fortement connexe et, en vertu de la proposition 7, il existe des K_i, K_j finis.

Le paragraphe suivant traite d'un algorithme pour la détermination des intervalles $[K_i, -K_j]$. Le fait que les bornes de ces intervalles soient entières conduira à une notion d'équilibre qui sera d'abord défini pour un programme linéaire à variables entières quelconques car elle intervient aussi dans les problèmes avec contraintes disjonctives.

2.32 Recherche d'un système d'intervalles en équilibre

Soit un programme linéaire à variables entières défini par les contraintes :

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_s \alpha_s^t \ell_s \leq \beta_t \quad s \in S, \quad t \in T \quad \ell_s \in \mathbb{Z} \right\}$$

et $\mathcal{Q}$ le programme linéaire à variables continues associé à $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \sum_s \alpha_s^t \lambda_s \leq \beta_t \quad s \in S \quad t \in T \quad \lambda_s \in \mathbb{R} \right\}$$

Le problème qui motive la définition des systèmes d'intervalles en équilibre (abrev. s.i.e.) est la recherche d'un hypercube

$$\prod_s [LL_s, UL_s]$$

contenant toutes les solutions de $\mathcal{P}$.

La méthode immédiate pour résoudre ce problème consiste à chercher l'hypercube $\prod_s [L\Lambda_s, U\Lambda_s]$ circonscrit au domaine de $\mathcal{Q}$, soit

$$\begin{aligned} L\Lambda_s &= \text{minimum} \left\{ \lambda_s : \text{sous les contraintes } \mathcal{Q} \right\} \\ U\Lambda_s &= \text{maximum} \left\{ \lambda_s : \text{sous les contraintes } \mathcal{Q} \right\} \end{aligned}$$

Et de prendre $LL_s = E^+(L\Lambda_s)$ et $UL_s = E^-(U\Lambda_s)$.

Un s.i.e est la limite d'itérations de cette méthode, plus précisément,

- on part du couple de programmes $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$; de l'hypercube

$\prod_s [L\Lambda_s, U\Lambda_s]$ circonscrit au domaine de $\mathcal{Q}$ ou déduit un programme $\mathcal{P}_1$ qui a les mêmes solutions que $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ \mathcal{P} \text{ et } LL_s \leq \ell_s \leq UL_s \quad s \in S \quad \ell_s \in \mathbb{Z} \right\}$$

et un programme à variables continues associé à $\mathcal{P}_1$:

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ \mathcal{Q} \text{ et } LL_s \leq \lambda_s \leq UL_s \quad s \in S \quad \lambda_s \in \mathbb{R} \right\}$$

- la première itération consiste à appliquer la méthode de troncature au couple $(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1)$ pour définir $(\mathcal{P}_2, \mathcal{Q}_2)$...

L'intérêt de ces itérations devrait apparaître dans l'exemple ci-après :

Exemple introductif à la notion de s.i.e.

- 1) Le domaine de $\mathcal{P}$ est réduit au point $(1, 2)$. Celui de $\mathcal{Q}$ est dessiné ci-contre, on trouve

$$L\Lambda_1^0 = 0,25 ; U\Lambda_1^0 = 2,4 \Rightarrow LL_1^0 = 1 ; UL_1^0 = 2$$

$$L\Lambda_2^0 = 0,9 ; U\Lambda_2^0 = 2,2 \Rightarrow LL_2^0 = 1 ; UL_2^0 = 2$$

Le domaine de $\mathcal{Q}_1$ est dessiné en fig 24

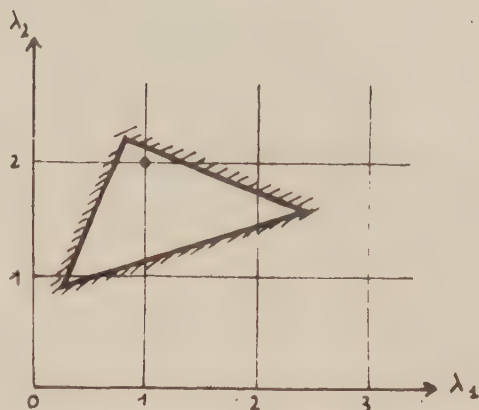


fig. 23 : domaine de $\mathcal{Q}$

- 2) La méthode de troncature appliquée à $(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1)$ donne

$$L\Lambda_1^1 = 1 ; U\Lambda_1^1 = 2 \Rightarrow LL_1^1 = 1 ; UL_1^1 = 2$$

$$L\Lambda_2^1 = 1,1 ; U\Lambda_2^1 = 2 \Rightarrow LL_2^1 = 2 ; UL_2^1 = 2$$

Le domaine de $\mathcal{Q}_2$ est dessiné en fig 25

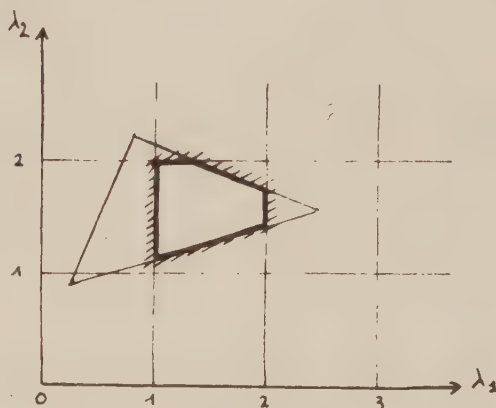


fig. 24 : domaine de $\mathcal{Q}_1$

- 3) La troncature sur le domaine de $\mathcal{Q}_2$ donne le domaine de $\mathcal{P}$ car

$$L\Lambda_1^2 = 1 ; U\Lambda_1^2 = 1,3 \Rightarrow LL_1^2 = 1 ; UL_1^2 = 1$$

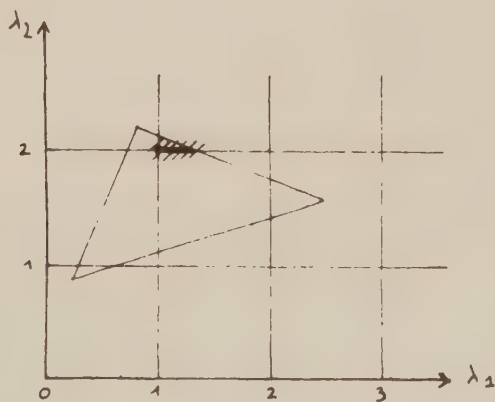


fig 25 : domaine de $\mathcal{Q}_2$

Les remarques et l'exemple précédents conduisent à la définition et à l'algorithme ci-après :

Définition 4

Un système d'intervalles $\{ [\tilde{L}_A, \tilde{U}_A] : A \in S \quad \tilde{L}_A, \tilde{U}_A \in \mathbb{Z} \}$ est un s.i.e si

$$\begin{aligned} \forall A_* \in S \quad \tilde{L}_{A_*} &= \text{minimum} \{ \lambda_{A_*} \text{ sous les contraintes } \mathcal{R} \text{ et } \tilde{L} \leq \lambda_A \leq \tilde{U}_A \} \\ " \quad \tilde{U}_{A_*} &= \text{maximum} \{ " " " " " " " " \} \end{aligned}$$

Algorithme 2 : construction d'un s.i.e

étape 0

$$\forall A \in S \quad \text{on pose} \quad LL^0_A = -\infty, \quad UL^0_A = +\infty$$

étape q

1er_cas : $\forall A \in S \quad LL^{q-1}_A \leq UL^{q-1}_A$ et $\exists A(q)$ tel que

$$LL^{q-1}_{A(q)} < \text{minimum} \{ \lambda_{A(q)} \text{ sous les contraintes } \mathcal{R}, LL^{q-1}_A \leq \lambda_A \leq UL^{q-1}_A \}$$

$$\text{ou} \quad UL^{q-1}_{A(q)} > \text{maximum} \{ " " " " " " " " \}$$

on pose :

$$LL^q_{A(q)} = E^+ \left(\text{minimum} \{ \lambda_{A(q)} \text{ sous les contraintes } \mathcal{R}, LL^{q-1}_A \leq \lambda_A \leq UL^{q-1}_A \} \right)$$

$$\text{ou} \quad UL^q_{A(q)} = E^- \left(\text{maximum} \{ " " " " " " " " \} \right)$$

on passe à l'étape $q + 1$ avec $LL^q_A = LL^{q-1}_A, \quad UL^q_A = UL^{q-1}_A$ si $A \neq A(q)$

2ème_cas : $\exists A \in S$ tel que $LL^{q-1}_A > UL^{q-1}_A$, $\mathcal{S}$ n'a pas de solution

3ème_cas : $\{ LL^{q-1}_A, UL^{q-1}_A \mid A \in S \}$ est un s.i.e

La preuve de cet algorithme découle immédiatement de la définition

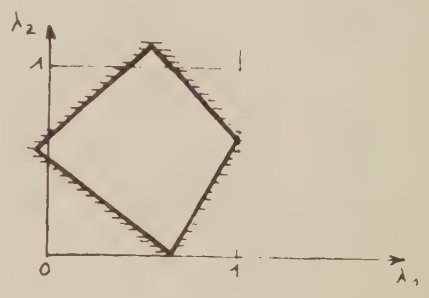
des LL et UL : si $\mathcal{S}$ admet une solution $\{ \bar{\ell}_A \mid A \in S \}$

on a $\forall A \quad \forall q \quad LL^q_A \leq \bar{\ell}_A \leq UL^q_A$.

.../

Il est à remarquer que l'existence d'un s.i.e est seulement une condition nécessaire pour que $\mathcal{S}$ admette une solution, ainsi dans l'exemple suivant on peut trouver un s.i.e mais $\mathcal{S}$ n'a pas de solution.

Le domaine de $\mathcal{Q}$ est dessiné ci-contre,
 $\{[0,1], [0,1]\}$ est un s.i.e et $\mathcal{Q}$
 ne contient pas de point à coordonnées
 entières.



Enfin on peut noter que la définition et l'algorithme précédent s'étendent naturellement aux bornes des variables entières d'un programme linéaire mixte.

2.33 Intérêt des s.i.e pour un problème défini par Γ_θ

La recherche d'un s.i.e apparaît très lourde dans le cas général puisqu'une étape de l'algorithme 2 consiste en la résolution de 2151 programmes linéaires :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser } \{ \lambda_{j*} : \text{sous les contraintes } \mathcal{Q} \text{ et } LL_j^q \leq \lambda_j \leq UL_j^q \} \\ \text{maximiser } \{ \text{ " " " " " " " " " " } \} \end{array}$$

L'intérêt pratique des s.i.e pour un problème défini par Γ_θ provient de la proposition 5 qui montre que :

$$\begin{array}{l} \text{minimum } \{ x_{i*}^{(1)} \text{ sous les contraintes définies par } \Gamma_\theta \text{ et } K_i^q \leq x_i \leq K_j^q \} = l_{i,j*}^q \\ \text{maximum } \{ \text{ " " " " " " " " " " } \} = -l_{j,i*}^q \end{array}$$

$l_{i,j}^q$ est la longueur du plus long chemin de i à j d'un graphe $\Gamma_\theta G$ comprenant les arcs et les sommets de Γ_θ plus les arcs associés aux contraintes $t_i - y_j \geq K_j^q \theta$ et $y_j - t_i \geq K_i^q \theta$.

Ainsi la recherche d'un s.i.e est ramenée à la recherche de plus longs chemins sur un graphe.

2.34 Définition d'un s.i.e adaptée au problème de la MINIMISATION DES EN COURS

Rappelons qu'il s'agit de trouver un ensemble d'intervalles

$$\{ [K_i, -K_j] , [B_{1g}, -B_{fg}] \quad i \in N' \quad g \in G \}$$

(1) x est une variable réelle soumise aux mêmes contraintes que k

qui contient toutes les solutions $\{\bar{k}_i, \bar{b}_g\}$ meilleures qu'une solution donnée de valeur $\mathcal{E}_{\text{sup}}$, c'est-à-dire telles que

$$\sum_g c_g \bar{b}_g \leq \mathcal{E}_{\text{sup}}.$$

Auparavant d'adapter la définition d'un s.i.e aux intervalles $[K_i, -K_j]$ on doit traduire la contrainte linéaire:

$$\sum_g c_g b_g \leq \mathcal{E}_{\text{sup}}$$

par des valeurs finies des B_{fg} de manière que, en vertu de la proposition 7, les K_i et K_j soient fixés.

En pratique les B_{fg} sont initialisés par :

$$B_{fg}^0 = -(1/c_{g*}) \left(\mathcal{E}_{\text{sup}} - \sum \{c_g B_{ig}^0 : g \in G - \{g_*\}\} \right)$$

la borne inférieure B_{ig}^0 de $b_g = t_{fg} - t_{ig}$ étant :

- soit le plus long chemin de i_g à f_g dans $\mathcal{G}$
- soit la solution du problème défini par Γ_θ qui minimise $(t_{fg} - t_{ig})$

Puis les intervalles $[B_{ig}, -B_{fg}]$ sont réduits au fil des étapes de la recherche d'un s.i.e.

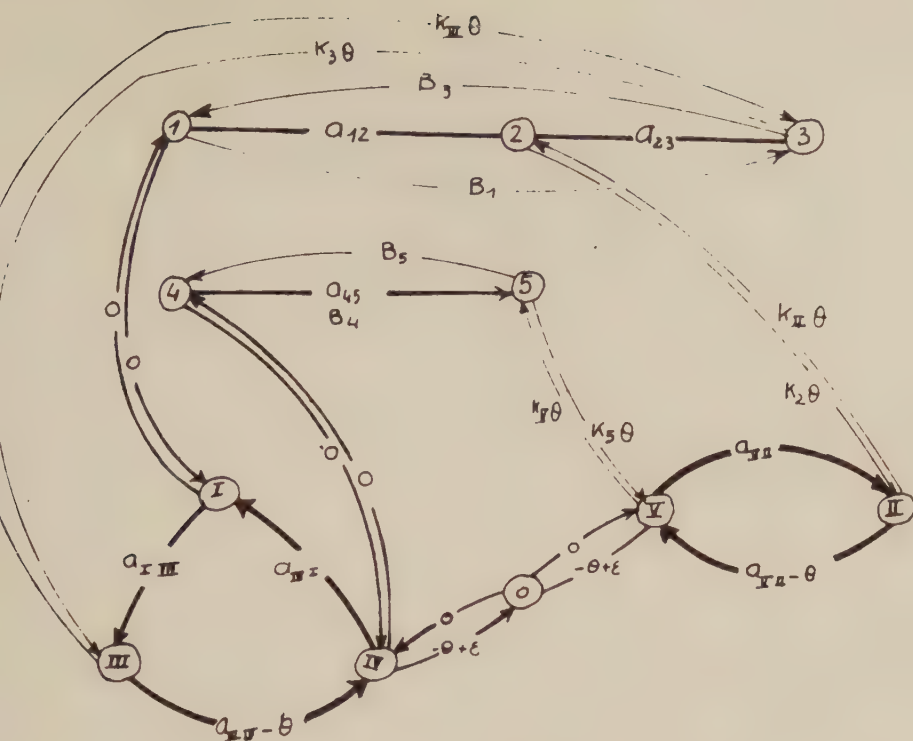
Pour énoncer la définition d'un s.i.e adaptée à la MINIMISATION DES EN COURS nous avons besoin de définir une généralisation de Γ_θ :

Définition 5 : graphe $\Gamma_\theta G (K_i, K_j, i \in N' \text{ } j \sim i : B_{ig}, B_{fg} \text{ } g \in G)$

Le graphe $\Gamma_\theta G (K_i, K_j, i \in N' \text{ } j \sim i, B_{ig}, B_{fg} \text{ } g \in G)$ représente

- 1) les mêmes inégalités de potentiels que Γ_θ
- 2) les inégalités de potentiels $t_i - y_j \geq K_j \theta$ et $y_j - t_i \geq K_i \theta$
- 3) les inégalités de potentiels $t_{ig} - t_{fg} \geq B_{fg}$ et $t_{fg} - t_{ig} \geq B_{ig}$

(note : les K et B sont des constantes)



- les arcs de Γ_θ sont représentés en traits forts

- $1 \sim I, 2 \sim II, 3 \sim III$

$4 \sim IV, 5 \sim V, 6 \sim VI$

- $1 = 1_1, 4 = 1_2$

$3 = f_1, 5 = f_2$

figure 26

De la proposition 5 il résulte la

Définition 6 : Le système d'intervalles $\{[\tilde{\kappa}_i, -\tilde{\kappa}_j] \mid j \sim i, i \in N'\}$ est un s.i.e contenant toutes les solutions du problème défini par Γ_θ telles que $B_{1g} \leq b_g \leq -B_{fg}$ $g \in G$ si et seulement si

$$\forall i \in N' \quad l_{ij}/\theta = \tilde{\kappa}_i \theta \quad \text{et} \quad l_{ji}/\theta = \tilde{\kappa}_j \theta$$

l_{ij} et l_{ji} sont les longueurs de plus longs chemins du graphe $\Gamma_\theta G(\tilde{\kappa}_i, \tilde{\kappa}_j \mid i \in N' \mid j \sim i; B_{1g}, B_{fg} \mid g \in G)$.

Algorithme 3 : Construction d'un s.i.e contenant toutes les solutions meilleures que $\mathcal{E}_{\text{sup}}$:

étape 0

On part de $\Gamma_\theta G(\kappa_i^0 = -\infty, \kappa_j^0 = -\infty \mid i \in N' : B_{1g}^0, B_{fg}^0 \mid g \in G)$

étape q

1er cas Si $\forall i \in N' \quad \kappa_i^{q-1} + \kappa_j^{q-1} \leq 0$ et

$\exists i_q : l_{iq}^{q-1} > \kappa_{iq}^{q-1} \theta$ ou $l_{jq}^{q-1} > \kappa_j^{q-1} \theta$

on pose $\kappa_{iq}^q = E^+(l_{iq}^{q-1}/\theta)$ ou $\kappa_j^q = E^+(l_{jq}^{q-1}/\theta)$

$\forall i \neq i_q \quad \kappa_i^q = \kappa_i^{q-1}, \quad \kappa_j^q = \kappa_j^{q-1}; \quad B_{1g}^q = B_{1g}^{q-1}, B_{fg}^q = B_{fg}^{q-1}$

on passe à l'étape $q+1$

(note : l^{q-1} est la longueur d'un chemin de $\Gamma_\theta(\kappa_i^{q-1}, \kappa_j^{q-1}, B_{1g}^{q-1}, B_{fg}^{q-1})$)

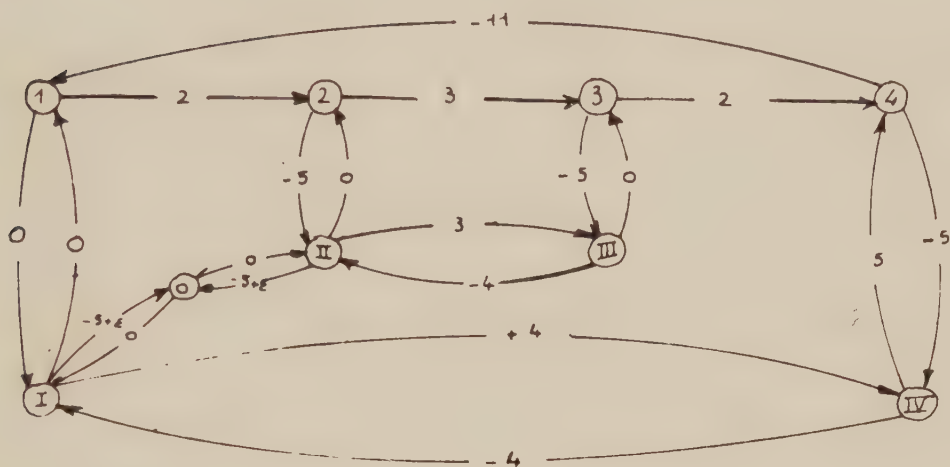
2^{ème} cas Si $\forall i \in N' \quad \kappa_i^{q-1} + \kappa_j^{q-1} < 0$ et $\exists g : l_{ig}^{q-1} > B_{ig}^{q-1} + \epsilon$ (1)

on pose $\forall g, g_0 \quad B_{ig}^q = l_{ig}^{q-1} g$, $B_{jg_0}^q = (1/c_{g_0}) (\mathcal{C}_{sup} - \sum_{g \neq g_0} c_g B_{ig}^q)$ et
 $\forall i \in N' \quad \kappa_i^q = \kappa_i^{q-1}$, $\kappa_j^q = \kappa_j^{q-1}$ $j \sim i$. on passe en $q+1$

3^{ème} cas Si $\exists i \in N' : \kappa_i^{q-1} + \kappa_j^{q-1} > 0$ le problème n'a pas de solution.

4^{ème} cas $\{[\kappa_i^{q-1}, \kappa_j^{q-1}] \mid i \in N'\}$ est un s.i.e.

exemple de s.i.e



$$- [\tilde{\kappa}_2 = -1, \tilde{\kappa}_{II} = 0] \quad , \quad [\tilde{\kappa}_3 = -1, \tilde{\kappa}_{III} = 0] \quad , \quad [\tilde{\kappa}_4 = -1, -\tilde{\kappa}_{IV} = -1]$$

$$- [B_1 = 9, -B_4 = +11]$$

figure 27

2.35 Résolution complète du problème : adaptation de P.S.E.P.

Lorsque le s.i.e contenant toutes les solutions meilleurs que $\mathcal{C}_{sup}$ est déterminé il arrive fréquemment que

- $\exists i \in N' : \kappa_i + \kappa_j < 0$ (un ou des κ_i ne sont pas fixés)
- $\exists g \in G : B_{ig} + B_{jg} < \epsilon$ (un ou des l_{ig} ne sont pas fixés à ϵ près)

On poursuit alors la résolution par la procédure S.E.P.

.../

(1) on prend $\epsilon > 0$ pour que l'algorithme converge en un nombre fini d'itérations.

2.351 Principe de l'adaptation de P.S.E.P. à notre problème

On définit une suite de partitions de l'hypercube

$$\Pi \left\{ [K_i^\circ, -K_j^\circ] \times [B_{1g}^\circ, -B_{1g}^\circ] \mid i \in N', g \in G \right\}$$

qui est le résultat de la recherche de s.i.e précédente.

Pour passer d'une partition à la suivante, on sépare un de ses éléments en deux "moitiés". A titre d'exemple dans le cas où $N' = \{i_1, i_2\}$ et $G = \{1, 2\}$, l'élément P d'une certaine partition peut être séparé de quatre manières:

$$P = [PK_{i_1}, -PK_{j_2}] \times [PK_{i_2}, -PK_{j_2}] \times [PB_{11}, -PB_{11}] \times [PB_{12}, -PB_{11}] = []^{i_1} []^{i_2} []^1 []^2$$

peut être séparé en

$$[PK_{i_1}, E^-(\frac{PK_{i_1} - PK_{j_1}}{2})] \times []^{i_2} []^1 []^2 \text{ et } [E^+(\frac{PK_{i_1} - PK_{j_1}}{2}), -PK_{j_1}] \times []^{i_2} []^1 []^2$$

$$\text{ou } []^{i_1} \times [PK_{i_2}, E^-(\frac{PK_{i_2} - PK_{j_2}}{2})] \times []^1 []^2 \text{ et } []^{i_1} \times [E^+(\frac{PK_{i_2} - PK_{j_2}}{2}), -PK_{j_2}] \times []^1 []^2$$

$$\text{ou } []^{i_1} []^{i_2} \times [PB_{11}, \frac{PB_{11} - PB_{12}}{2}] \times []^2 \text{ et } []^{i_1} []^{i_2} \times [\frac{PB_{11} - PB_{12}}{2} + \varepsilon, -PB_{11}] []^2$$

$$\text{ou } []^{i_1} []^{i_2} \times []^1 \times [PB_{12}, \frac{PB_{12} - PB_{11}}{2}] \text{ et } []^{i_1} []^{i_2} \times []^1 \times [\frac{PB_{12} - PB_{11}}{2} + \varepsilon, -PB_{12}]$$

Et, on répond à la question :

"Quel élément d'une partition doit-on séparer ?"

en prenant l'hypercube P sur lequel l'évaluation par défaut de $\mathcal{E}$:

$$\sum \{ c_g l_{1g1g} : l \text{ "chemin" de } (1) \Gamma_0 G (PK_i, PK_j, PB_{1g}, PB_{1g}) \}$$

est la plus petite.

La solution optimale est obtenue lorsque l'hypercube choisi pour être séparé est réduit à un élément.

2.352 Détails sur l'adaptation de P.S.E.P.

1) Place et rôle de la recherche d'un s.i.e en cours de P.S.E.P.

La recherche d'un s.i.e est le préalable à la séparation, ceci dans le double but :

a) d'éviter de séparer des hypercubes qui, conduisant à un s.i.e vide, ne contiennent pas de solution,

- b) d'établir plus rapidement qu'un hypercube contient un seul jeu de $\{k_i : i \in N'\}$ solution.

En d'autres termes, on sépare l'hypercube sélectionné si la condition nécessaire d'existence d'une solution s'avère insuffisante (i.e : si $\forall i \ k_i \theta = l_i, \ k_j \theta = l_j \not\Rightarrow K_i + K_j \geq 0$)

2) Détails sur la séparation d'un hypercube

Supposons que l'hypercube du 2.351 vienne d'être sélectionné.

On doit déterminer quel intervalle $\left([PK_{i_1}, -PK_{j_1}] \text{ ou } []^{i_2} \right.$
ou $\left. [PB_{i_1}, -PB_{j_1}] \text{ ou } []^{i_2} \right)$ doit être séparé.

Les critères de choix adoptés sont indépendants de la nature des intervalles (intervalles en K ou en B), ils sont basés sur l'évaluation par défaut ~~de~~ sur les deux "moitiés" de P.

Par exemple, la séparation de P en

$$\left[PK_{i_1}, E^-\left(\frac{PK_{i_1} - PK_{j_1}}{2}\right) \right] \times \left[\right]^{i_2} \times \left[\right]^1 \times \left[\right]^2$$

$$\text{et } \left[E^+\left(\frac{PK_{i_1} - PK_{j_1}}{2}\right), -PK_{j_1} \right] \times \left[\right]^{i_2} \times \left[\right]^1 \times \left[\right]^2$$

conduit aux évaluations

$$\sigma(i_1, \text{gauche}) = \sum \left\{ c_g l_{i_g f_g} : g \in \{1, 2\}, l_{i_g f_g} \text{ est un "chemin" de } \Gamma_\theta G \left(PK_{i_1}, E^-\left(\frac{PK_{i_1} - PK_{j_1}}{2}\right), PK_{i_2}, PK_{j_2}, PB_{i_g}, PB_{f_g} \right) \right\}$$

$$\sigma(i_1, \text{droite}) = \sum \left\{ c_g l_{i_g f_g} : g \in \{1, 2\}, l_{i_g f_g} \text{ est un "chemin" de } \Gamma_\theta G \left(E^+\left(\frac{PK_{i_1} - PK_{j_1}}{2}\right), PK_{j_1}, PK_{i_2}, PK_{j_2}, PB_{i_g}, PB_{f_g} \right) \right\}$$

Dans l'ordre décroissant des priorités les critères de choix sont :

$$1) \text{ on choisit } \alpha^* \in \{i_1, i_2, 1, 2\} \text{ tel que}$$

$$\min \left(\sigma(\alpha^*, \text{dr}), \sigma(\alpha^*, \text{ga}) \right) = \max_\alpha \left(\min \left(\sigma(\alpha, \text{dr}), \sigma(\alpha, \text{ga}) \right) \right)$$

2) si tous les α sont équivalents pour le critère ci-dessus, on choisit α^* tel que

$$\max \left(\sigma(\alpha^*, \text{dr}), \sigma(\alpha^*, \text{ga}) \right) = \max_\alpha \left(\max \left(\sigma(\alpha, \text{dr}), \sigma(\alpha, \text{ga}) \right) \right)$$

3) si tous les α sont équivalents pour les critères ci-dessus, on choisit i_1 .

Le premier de ces critères traduit notre désir d'effectuer la séparation qui devrait nous rapprocher le plus de l'optimum, le second notre désir de différencier au mieux les deux nouveaux hypercubes de manière à éviter que leurs sous ensembles entrent rapidement en concurrence lors de choix ultérieurs.

2.4 ASPECTS INFORMATIQUES

2.41 Principes de la programmation

Au niveau des principes de la programmation il n'est plus besoin de distinguer la MINIMISATION DE LA PERIODE et la MINIMISATION DES EN COURS. En effet, la résolution des deux problèmes présente le même découpage en deux phases et fait appel aux mêmes types de calcul :

- 1) la première phase consiste à déterminer la valeur d'inconnues portées par des arcs d'un graphe.

L'essentiel de cette détermination est une suite de calculs de longueurs de plus longs chemins à partir desquelles on connaît

- soit la valeur des inconnues (ex: $k_i = E^+(l_{ji}/\theta)$)
- soit les bornes sur les inconnues (ex : $K_i = E^+(l_{ij}/\theta)$ ou $B_{1g} = l_{1g} l_{3g}$)

Dans le cas des EN COURS on itère sur cette première phase suivant P.S.E.P.

- 2) la seconde phase des deux résolutions consiste en la recherche d'un système de potentiels sur un graphe obtenu à la première phase.

Le codage de graphe adopté est un codage matriciel. Nous allons voir que cette représentation permet de travailler sur $\widehat{\Gamma}_\theta$ ou $\widehat{\Gamma}_\theta G$ et que, de ce fait ,

- 1) la modification des plus longs chemins consécutive aux troncatures du type " l_{ij} devient $E^+(l_{ij}/\theta) \times \theta$ " est un calcul élémentaire
- 2) il est immédiat d'extraire un sous graphe de $\widehat{\Gamma}_\theta$ ou $\widehat{\Gamma}_\theta G$
- 3) lorsque toutes les inconnues portées par des arcs sont fixées, les systèmes de potentiels minorant ou majorant universels décrit dans la proposition 2 s'obtiennent par simple lecture d'éléments d'une matrice.

2.411 Représentation matricielle des graphes

Nous nous limitons ici aux seuls aspects de la représentation matricielle des graphes qui interviennent dans nos programmes. Un exposé complet sur ce sujet peut être trouvé dans ((13) chapitre IV et (14) chapitre VII).

Définition 4 - Soit un graphe Q de n sommets représentant un système d'inégalités de potentiel. Les éléments $a_{ii'}$ de la matrice A d'ordre n associée à Q sont tels que

- $\forall i \quad i = 1, \dots, n \quad a_{ii}$ est égal à la longueur de la boucle i si elle existe, sinon $a_{ii} = 0$

$\forall i, i' \quad i \neq i' \quad a_{ii'}$ est la longueur de l'arc de i à i' de Q ; $a_{ii'} = -\infty$ si cet arc n'existe pas.

note : en général le graphe associé à un système d'inégalités de potentiel n'a pas de boucles car une boucle i représente la contrainte $t_i - t_i = 0 \gg a_{ii}$. La considération des boucles est toutefois indispensable lorsqu'on s'intéresse à $\hat{q}$. Dans cas a_{ii} est égale à la longueur du plus long circuit de Q passant par i .

Détermination de la matrice associée à $\hat{q}$

Nous avons programmé un algorithme de I. TOMESCU (9) qui est une généralisation d'un algorithme de B. ROY ((13) chapitre IV) : Dans le cas où Q n'a pas de circuits de longueur positive les éléments $a_{ii'}^{(n)}$ de la matrice associée à $\hat{q}$ sont déduits des éléments $a_{ii'}^{(0)}$ de la matrice associée à Q par les boucles de calcul ci-dessous :

Pour $q = 1$ à n Faire (1)

$$(1) \left[\begin{array}{l} \text{Pour } i = 1 \text{ à } n \quad \text{Faire (2)} \\ (2) \left[\begin{array}{l} \text{Pour } i' = 1 \text{ à } n \quad \text{Faire (3)} \\ (3) \left[a_{ii'}^q = \text{maximum} \left(a_{ii'}^{q-1}, a_{ii}^{q-1} + a_{ii'}^{q-1} \right) \right] \end{array} \right] \end{array} \right]$$

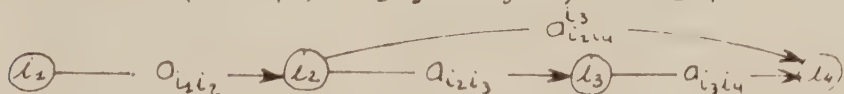
Dans le cas où Q a un circuit de longueur positive celui-ci est signalé en cours de procédure par un terme diagonal positif. Dans ce cas pour construire la matrice associée à $\hat{q}$ il faudrait itérer une infinité de fois sur q .

Le mécanisme de cette procédure peut être imaginé à partir de l'illustration suivante :

Soit le chemin $(i_1) \xrightarrow{a_{i_1 i_2}} (i_2) \xrightarrow{a_{i_2 i_3}} (i_3) \xrightarrow{a_{i_3 i_4}} (i_4)$
de Q avec $i_1 \leq i_3 \leq i_4 \leq i_2$.

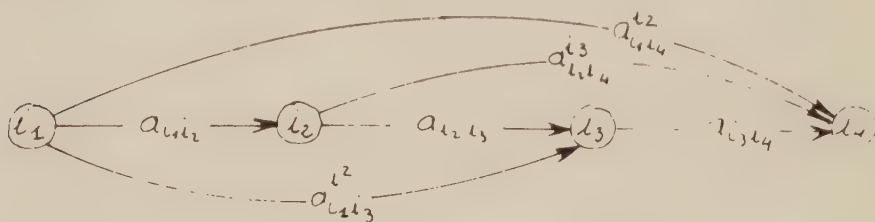
Au cours du calcul on trace de nouveaux arcs aux étapes :

- $q = i_3$, $i = i_2$, $i' = i_4$, on trace un arc de i_2 à i_4 de longueur $\max(a_{i_2 i_4}, a_{i_2 i_3} + a_{i_3 i_4}) = a_{i_2 i_4}^{i_3}$



- $q = i_2$, $i = i_4$, $i' = i_3$ on trace un arc de i_4 à i_3 de longueur $a_{i_4 i_3}^{i_2} = \max(a_{i_4 i_3}, a_{i_4 i_2} + a_{i_2 i_3})$

- $q = i_2$, $i = i_4$, $i' = i_4$ on trace un arc de i_4 à i_4 de longueur $a_{i_4 i_4}^{i_2} = \max(a_{i_4 i_4}, a_{i_4 i_2} + a_{i_2 i_4})$



L'algorithme ci-dessus est mis en oeuvre dans n^2 mémoires en n^2 additions et n^3 opérations du type

$$(x, y) \longrightarrow z = \max(x, y)$$

On peut notablement améliorer ses performances lorsque le nombre d'arcs est faible devant n^2 . Il suffit pour cela de sauter la boucle (2) chaque fois que $a_{i,q} = -\infty$.

A titre d'exemple, dans la construction de la matrice associée à un Γ_0 de 70 sommets et 85 arcs cette modification permet de réduire le temps de calcul de 25s à 5s. (CDC 3600)

2.412 La représentation matricielle des graphes et la programmation de

l'algorithme 1 : recherche d'une solution,

l'algorithme 2 : recherche d'un s.i.e.,

la procédure S.E.P.

Ces algorithmes reviennent à la construction d'une ou de suites de graphes :

- Le graphe initial est

- $\widehat{\Gamma}_0$ dans l'algorithme 1 et la recherche du s.i.e initial
- $\widehat{\Gamma}_0 G(PK_i, PK_j, PB_{i_3}, PB_{j_3})$ dans la recherche d'un s.i.e inclus dans P.S.E.P.

- le graphe d'ordre q est déduit du graphe d'ordre $q-1$ par l'augmentation de la longueur d'un ou deux arcs, par exemple

. l_{ij} ou/et l_{ji} $j \sim i$ deviennent $E^+(l_{ij}/\theta) \times \theta$ ou/et $E^+(l_{ji}/\theta) \times \theta$.

. $l_{i_1 i_2}$ devient $-(1/c_{g*}) (E_{sup} - \sum_{g \neq g*} c_g l_{i_1 i_2})$

. l_{ij} devient $E^+(\frac{\kappa_i - \kappa_j}{2}) \times \theta$ (séparation dans P.S.E.P.)

Il nous faut donc expliquer la construction de $\widehat{\Gamma}_\theta$, d'un $\widehat{\Gamma}_\theta G$ puis le calcul des plus longs chemins après l'augmentation d'un ou deux arcs.

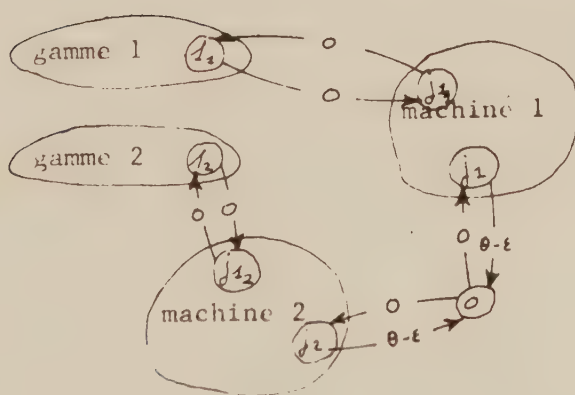
1) Construction de $\widehat{\Gamma}_\theta$

A l'heure actuelle $\widehat{\Gamma}_\theta$ est obtenu par l'algorithme de ROY-TOMESCU modifié pour tenir compte de la forte proportion de termes égaux à $-\infty$.

(note : cette proportion diminue au cours de l'algorithme, pour 70 sommets elle passe de 97 % (matrice associée à Γ_θ) à 25 % (matrice associée à $\widehat{\Gamma}_\theta$)).

Pour les problèmes de grande taille (plus de 100 tâches) dans le cas très fréquent où G n'a pas de circuit, il est sans doute préférable de construire $\widehat{\Gamma}_\theta$ de la manière suivante :

Allure de Γ_θ



Algorithme pour construire la matrice $A = \{a_{ij}\}$ associée à $\widehat{\Gamma}_\theta$

- 1- Par l'algorithme de ROY-TOMESCU on détermine les sous matrices associées aux sous graphes

. $(\widehat{\Gamma}_\theta(g)) \quad g \in G$

. $(\widehat{\Gamma}_\theta(m)) \quad m \in M$

- 2- $\forall j$ sommet de (machine m) et $\forall j'$ sommet de (machine m') $m \neq m'$

$$a_{jj'} = a_{j1m} + (-\theta + \epsilon) + a_{1m'j'}$$

3- $\forall i$ sommet de (gamme g) $a_{ij} = a_{i1g} + a_{jg}$ $j \sim 1g$

4- $\forall j$ sommet de (machine m) $a_{j1g} = a_{jj}$ $j \sim 1g$.

2) Construction d'un $\widehat{\Gamma}_\theta G$ ($PK_i, PK_j, PB_{1g}, PB_{f_g}$)

Cette construction est un sous programme de P.S.E.P.

$PK_i, PK_j, B_{1g}, B_{fg}$ sont les bornes de l'hypercube P sélectionné à une étape q , $\widehat{\Gamma}_\theta G (PK_i, PK_j, PB_{1g}, PB_{fg})$ est le graphe initial de la recherche d'un s.i.e qui précède la séparation.

On doit distinguer deux cas :

- a) l'hypercube P sélectionné à l'étape q est une "moitié" de l'hypercube H sélectionné à l'étape $q-1$

Dans ce cas on dispose en mémoire de

$\widehat{\Gamma}_\theta G (HK_i, HK_j, HB_{1g}, HB_{fg})$, si P est la moitié de H telle que

$$\cdot PK_i = HK_i \text{ et } PK_j = HK_j \quad i \neq i_0 \quad j \sim i$$

$$\cdot PK_{i_0} = E^+ \left(\frac{HK_{i_0} - HK_{j_0}}{2} \right) \text{ et } PK_{j_0} = HK_{i_0}$$

$$\cdot PB_{1g} = HB_{1g} \text{ et } PB_{fg} = HB_{fg} \quad g \in G$$

$\widehat{\Gamma}_\theta G (PK_i, PK_j, PB_{1g}, PB_{fg})$ diffère de $\widehat{\Gamma}_\theta G (HK_i, HK_j, HB_{1g}, HB_{fg})$

uniquement par la longueur de l'arc de i_0 à j_0 . On est ramené au problème traité ci-après du calcul des plus longs chemins après l'augmentation de la longueur d'un arc

- b) l'hypercube P n'est pas une "moitié" de l'hypercube H

On construit $\widehat{\Gamma}_\theta G (PK_i, PK_j, PB_{1g}, PB_{fg})$ à partir du graphe $\widehat{\Gamma}_\theta G (K_i^\circ, K_j^\circ, B_{1g}^\circ, B_{fg}^\circ)$ associé au s.i.e initial de la procédure S.E.P.

La procédure consiste en des itérations sur le calcul des plus longs chemins quand la longueur d'un ou deux arcs est augmentée, on a ℓ itérations si ℓ des PK_i ou PK_j ou PB_{1g} ou PB_{fg} sont tels que :

$$PK_i > K_i^\circ \text{ ou } PK_j > K_j^\circ \text{ ou } PB_{1g} > B_{1g}^\circ \text{ ou } PB_{fg} > B_{fg}^\circ.$$

Cette construction est coûteuse en temps machine, elle nécessite $\ell \times 3n^2$ opérations pour une matrice d'ordre n ($3n^2$ est le nombre d'opérations pour la mise à jour des plus longs chemins, cf ci-après).

3) Calcul des plus longs chemins après l'augmentation de la longueur d'un arc .

Si la longueur de l'arc de i_0 à j_0 devient $l_{i_0 j_0}^*$, et que

- $l_{ii'}$ soit la longueur des chemins avant l'augmentation
 - $l_{ii'}^*$ " " " après "

on a la formule classique :

$$l_{ii'}^* = \max (l_{ii'}, l_{i i_0} + l_{i_0 j_0}^* + l_{j_0 i'})$$

Il faut donc $3n^2$ opérations pour mettre à jour une matrice d'ordre n .

4) Calcul des plus longs chemins après l'augmentation de la longueur des arcs de i_0 à j_0 et de j_0 à i_0 .

Le sous programme correspondant à ce calcul est utilisé dans la recherche d'une solution :

à l'étape q , $l_{i_q j_q}^{q-1}$ n'existant pas on choisit $\bar{k}_{i_q}$ dans l'intervalle $]-\infty, -E^+(l_{j_q i_q}^{q-1} / \theta)]$. La longueur de l'arc de i_q à j_q devient $\bar{k}_{i_q} \theta$, celle de l'arc de j_q à i_q devient $-\bar{k}_{i_q} \theta$.

La formule de mise à jour des plus longs chemins est dans ce cas : $l_{ii'}^* = \text{maximum} (l_{ii'}, l_{i i_0} + l_{i_0 j_0}^* + l_{j_0 i'}, l_{i j_0} + l_{j_0 i_0}^* + l_{i_0 i'})$

Preuve : on applique deux fois la formule du 3) ci-dessus,

$$l_{ii'}^* = \max (\max (l_{ii'}, l_{i i_0} + l_{i_0 j_0}^* + l_{j_0 i'}) , \max (l_{i j_0}, l_{i i_0} + l_{i_0 j_0}^* + l_{j_0 j_0}) + l_{j_0 i_0}^* + \max (l_{i i'}, l_{i i_0} + l_{i_0 j_0}^* + l_{j_0 i'}))$$

or

$$\max (l_{i j_0}, l_{i i_0} + l_{i_0 j_0}^* + l_{j_0 j_0}) + l_{j_0 i_0}^* + \max (l_{i i'}, l_{i i_0} + l_{i_0 j_0}^* + l_{j_0 i'}) = \begin{cases} l_{i j_0} + l_{j_0 i_0}^* + l_{i i'} & \text{ou} \\ l_{i i_0} + l_{i i'} \leq l_{ii'} & \text{ou} \\ l_{i i_0} + l_{i_0 j_0}^* + l_{j_0 i'} & \text{ou} \\ l_{i j_0} + l_{j_0 i'} \leq l_{ii'} \end{cases}$$

La mise à jour d'une matrice d'ordre n nécessite donc $6n^2$ opérations ce qui équivaut à deux applications de la formule du 3). L'expression ci-dessus est préférable car elle permet de gagner des références à la mémoire.

...!

2.42 Limites des programmes

Les limites à la résolution pratique de nos problèmes sont expliquées par deux chiffres significatifs de l'occupation mémoire et du temps de calcul.

- 1) Un graphe Γ_θ ou $\Gamma_\theta G$ ayant $2N$ sommets : $\{i, j : i = 1, \dots, N, j \sim i\}$ (1), l'ordre de la matrice représentant un tel graphe est $4N^2$
- 2) La mise à jour des plus longs chemins d'un graphe $\Gamma_\theta G$ après l'augmentation de la longueur d'un arc nécessite $3 \times (2N)^2$ opérations.

Pour trouver une solution il faut faire $2N' = 2(N - /G/)$ mises à jour soit $24N^2 (N - /G/)$ opérations. Ce nombre devient une limite inférieure dans le cas de la recherche d'un s.i.e.

Ainsi pour trouver l'ordonnancement de 150 tâches avec un ordinateur qui exécute une opération en 5 μ s, on doit disposer de 90.000 mémoires et d'environ 7mn de calcul.

De telles limites sont sévères, nous allons voir qu'elles peuvent être sensiblement reculées quand on tire parti des propositions 4 et 8.

Deux résultats qui permettent de reculer les limites des programmes

Proposition 4 (cf page 31)

Si les $k_i, i \in I \subset N'$ sont fixés, on peut poursuivre la recherche des $k_i, i \notin I$ restants sur le sous graphe de $\widehat{\Gamma}_\theta (k_i, i \in I)$ défini par les sommets $\{i \in N', i \notin I \text{ et } j \sim i\}$

Ainsi dans la recherche de $\{\bar{k}_i, i \in N'\}$ solution ou la recherche d'un s.i.e on peut réduire la matrice de deux unités chaque fois qu'un k_i est fixé. Toutefois après de telles réductions on ne dispose plus des éléments pour la détermination d'un système de potentiels, nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant.

Proposition 8 (cf page 41)

L'optimum d'une fonction des $t_i, i \in I$ du problème défini par Γ_θ est égal à l'optimum de la même fonction pour le problème défini par le sous graphe $\gamma_{\theta, \Delta(I)}$ de $\widehat{\Gamma}_\theta$ dont les sommets sont les $\{i, j : i \in I \text{ où } i \text{ admet un descendant dans } I, j \sim i\}$

(1) en pratique $\circ$ coïncide avec un des 1 m

Ce résultat est utile lorsque le coût de certaines pièces est prépondérant devant celui des autres. Dans ce cas, la proposition 8 permet d'ordonnancer la fabrication de ces pièces chères indépendamment du reste de la fabrication.

Intérêt de la proposition 4 pour la recherche d'une solution par l'algorithme 1

Nous avons vu en 2.42 que la recherche d'une solution nécessitait $24 N^2 (N-G/)$ opérations (1). Il s'agit dans ce paragraphe de chiffrer le gain résultant de la proposition 4.

1er cas : on cherche uniquement les $k_i \quad i \in N'$, le système de potentiel $\{t_i, i \in N\}$ est obtenu par une procédure annexe

A l'étape q de l'algorithme 1 l'ordre de la matrice est diminué de deux unités : on efface les lignes et colonnes iq et $jq \quad jq \sim iq$ après la mise à jour des plus longs chemins consécutive au tracé des arcs de iq à jq (longueur $k_{iq} \theta$) et de jq à iq ($-k_{iq} \theta$).

La mise à jour de la matrice nécessite $6 [(2N - 2|G| - 2q)^2 - (N - |G| - q)]$ opérations à l'étape $q + 1$, l'explication de cette formule tient dans les points suivants :

- a) le facteur 6 indique qu'il faut six opérations pour mettre à jour la longueur d'un plus long chemin,

$$(l_{ii'}^* = \max (l_{ii'}, l_{ii_0} + l_{i_0j_0}^* + l_{j_0i'}, l_{ij_0} + l_{j_0i_0}^* + l_{i_0i'}))$$

- b) $(2N - 2|G| - 2q)$ représente le nombre de sommets dont les lignes et colonnes n'ont pas encore été effacées.

- c) $(N - |G| - q)$ est le nombre d'éléments $a_{ij} \quad j \sim i \quad i \in \{i_1, \dots, i_q\} \cup \{j_g \mid g \in G\}$ de la matrice qui, du fait que G n'a pas de circuit, sont égaux à $-\infty$.

En définitive la recherche des k_i coûte :

$$24 \left[(N-G/)^2 + (N-G/-1)^2 + \dots + 1 \right] - 6 \left[(N-G/) + (N-G/-1) + \dots + 1 \right] \text{ opérations soit}$$

$$(8N - 8G/ + 1) (N - G/) (N - G/ + 1) \text{ opérations}$$

.../

(1) le temps de calcul de $\widehat{\Gamma}_\theta$ est supposé négligeable.

2.43 Conclusion

Les évaluations du paragraphe précédent montrent qu'il n'est guère pensable d'ordonnancer plus de 200 tâches (64×10^6 opérations pour la recherche d'une solution, sans doute $(200)^4 = 1,6 \times 10^9$ pour la recherche d'une solution optimale). Dès lors trois questions sont posées :

- 1) Un atelier moyen fabriquant 100 à 200 pièces différentes en 1000 à 2000 opérations. Quel service peuvent rendre des méthodes capables de prendre en compte une fraction seulement des fabrications ?
- 2) Quels développements de l'informatique permettraient de reculer les limites actuelles ?
- 3) Que peut-on attendre d'autres codages de graphe ?

éléments de réponse à la première question

D'après la proposition 8 quitte à renoncer à la solution optimale il est possible d'ordonnancer séparément des sous ensembles de tâches dont la somme représente toute la fabrication.

De plus, généralement, compte tenu de la disparité des coûts de stockage et de préparation des machines, toutes les pièces ne peuvent être exécutées avec la même périodicité. Le découpage en sous ensembles de tâches peut donc être imposé par des facteurs extérieurs à l'informatique ; nous reprenons ce point dans l'annexe 1.

éléments de réponse à la deuxième question

Les limites à la résolution pratique de notre problème seront notablement reculées dès que l'on disposera d'ordinateur ayant plusieurs unités de calcul (ne serait-ce que plusieurs additionneurs et logiques pour déterminer $\sup (x, y)$). De manière plus précise, si n est le nombre de tâches limite pour une unité de calcul, la limite devient $l \times n$ avec l unités de calcul.

La justification de cette réponse tient dans les deux points suivants :

- on peut mettre à jour simultanément tous les éléments de la matrice (rappel : la formule est $t_{ij}^* = \sup(t_{ij}, t_{io} + t_{oj}^*)$)
- pour ce type de calcul, les mémoires périphériques actuelles permettent d'approvisionner plusieurs unités de calcul simultanément (à partir d'un disque amovible banal on peut transférer un million de mots de 16 bits en 10 s alors que la mise à jour d'une matrice d'ordre mille dure au moins $3 (5 \times 10^{-6} \mu s) \times 10^6 = 15$ s)

éléments de réponse à la troisième question

Un autre codage de graphe peut être la représentation "Prédécesseur-Successeur" (15). A chaque sommet est associé autant de mémoires qu'il a de successeurs.

Dans le cas où $\mathcal{G}$ est composé de $/G/$ chemins et $\mathcal{M}$ de $/M/$ circuits, ce codage est adapté à notre graphe car le tableau des successeurs est d'ordre 2 pour tous les sommets exceptés les l_m .

Le nombre d'arcs de ce graphe est $(N - /G/) + 2N + N + 2/M/$ dont $N + /M/$ arcs de longueur négative (1). Par l'algorithme non matriciel de B. ROY, d'après la formule donnée dans (14) page 155, le calcul d'un plus long chemin nécessite au plus

$$2 (5N + 3 /M/ - /G/) (N + /M/) \text{ opérations}$$

Ce nombre est voisin des $12 N^2$ qu'implique le codage matriciel, il est une borne supérieure qu'on peut espérer diminuer sensiblement compte tenu des nombreuses particularités de notre graphe.

Mais la logique relativement complexe des méthodes non matricielles peut entraîner des temps machines supplémentaires qui compensent le gain résultant de la diminution du nombre d'opérations. Aussi, faute d'une expérimentation, il ne nous est pas possible de donner la préférence à l'une ou l'autre des méthodes ; seule la simplicité de la programmation des méthodes matricielles justifie notre choix.

.../

(1) $N - /G/$ = nombre d'arcs de $\mathcal{G}$

$2N$ = cardinal de l'ensemble des arcs associés aux contraintes $t_i + t_{i\theta} = y_j$

$N + 2/M/$ = nombre d'arcs de $\mathcal{M}$.

Troisième Partie

RESULTATS PRATIQUES

Nous illustrons ici les performances de nos programmes dans l'ordonnancement de deux lots de pièces :

- un lot de 10 manchons d'hélicoptères (pièce qui relie la pale au rotor principal)
- un lot de 12 "fusées" d'hélicoptères (" " " " ")

Les manchons subissent quatre usinages, un traitement thermique puis dix usinages. Comme le traitement thermique ne peut être pris en compte par notre méthode on suppose que la fabrication des manchons est équivalente à celle de deux pièces indépendantes suivant des gammes extraites de la gamme des manchons.

Pour la même raison on considère que la fabrication des fusées est équivalente à la fabrication de trois pièces indépendantes.

Les caractéristiques du problème sont :

- le sous graphe des gammes à 34 sommets, il est composé de cinq chemins
- 11 machines sont concernées par la fabrication
- la période de la fabrication est 160h (10 jours)
- le coût des en cours est représenté par la fonction

$$\sum_{g=1}^5 (t_{fg} - t_{ig})$$

Description sommaire des gammes		
Numéro	Nombre d'opérations	Somme des durées des opérations
1	4	224 heures
2	10	768 "
3	5	289 "
4	9	253 "
5	6	741 "

Caractéristiques des machines		
Numéro	Nombre d'opérations qui incombent à la machine	Charge
1	4	52,2 %
2	3	47,9 %
3	3	100 %
4	4	98,6 %
5	2	72,3 %
6	2	81,5 %
7	1	98,8 %
8	2	57,8 %
9	2	48,7 %
10	7	81,2 %
11	4	87,9 %

Il est à noter que θ correspond à la somme des durées des opérations qui incombent à la machine 3. La période de 160 h est donc minimale.

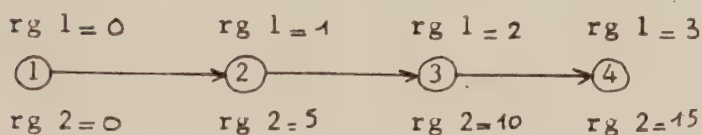
3.1 RECHERCHE D'UNE SOLUTION

Avant d'appliquer l'algorithme 1 on doit ranger les sommets de g de manière qu'à l'étape q de l'algorithme

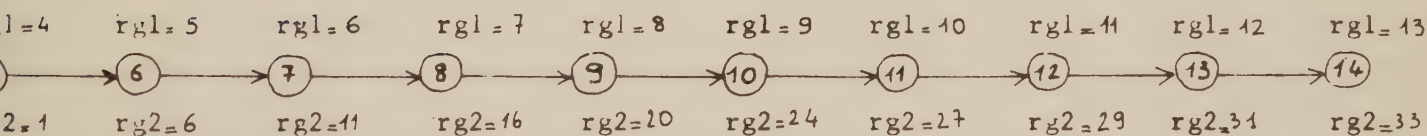
$$l_{ij}^{q-1} = -\infty \text{ pour tout } i \text{ tel que } h_i \text{ n'est pas encore fixé.}$$

Le graphe g de cet exemple étant composé de cinq chemins nous avons essayé les deux possibilités de rangement suivantes (notées rg 1 et rg 2)

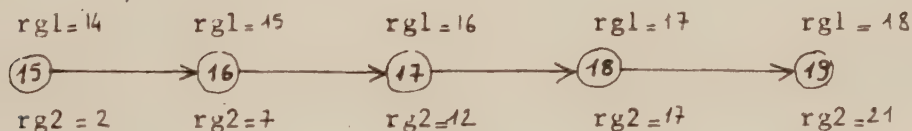
gamme 1 (4 opérations)



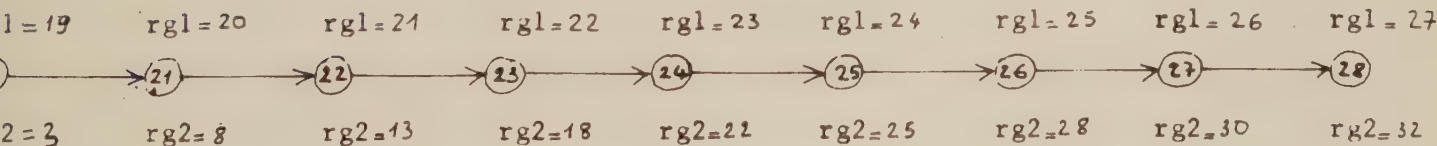
gamme 2 (10 opérations)



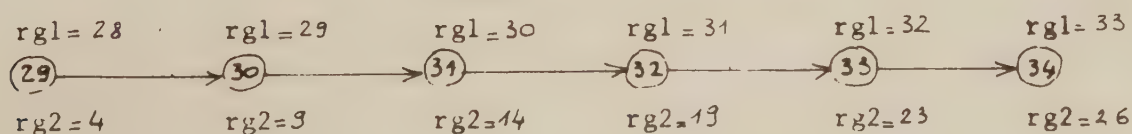
gamme 3 (5 opérations)



gamme 4 (9 opérations)



gamme 5 (6 opérations)



Résultats

Temps machine 10 s (C D C 3600)									
de e	rg 1	rg 2	Somme des durées des opérations	N° opération			N° opération		
					a)	b)		a)	b)
				1	0*	0*	18	- 4	-2
	316 h	295 h	224 h	2	0	0	19	- 3	-3
				3	- 1	- 1	20	0*	0*
	810 h	960 h	768 h	4	- 1	- 1	21	0	0
				5	0*	0*	22	-1	0
	404 h	344 h	289 h	6	0	0	23	-1	0
				7	- 1	- 1	24	-1	0
	422 h	396 h	253 h	8	- 1	- 1	25	-1	0
				9	- 1	- 2	26	-1	-2
	913 h	897 h	741 h	10	- 2	- 2	27	-2	-1
				11	- 2	- 2	28	-4	-2
IE	2865 h	2892 h	2275 h	12	- 2	- 3	29	0*	0*
				13	- 3	- 4	30	-1	-1
				14	- 5	- 6	31	-4	-2
				15	0*	0*	32	-4	-3
				16	- 1	0	33	-4	-4
				17	- 2	- 1	34	-5	-5

* les ⁰marqués d'un astérisque sont fixés par hypothèse en tant que première opération d'une gamme.

3.2 RECHERCHE D'UNE SOLUTION OPTIMALE POUR LE CRITERE

$$\mathcal{E} = \sum_{g=1}^5 (t_{fg} - t_{ig}) -$$

3.21 Recherche du s.i.e initial

En vertu de la proposition 7, de manière que les intervalles $[K_i, -K_j]$ soient finis, on doit tracer des arcs de f_g à i_g , $g=1, \dots, 5$ de longueur B_{fg}^0

Les B_{fg}^0 sont donnés par la formule

$$B_{fg^*}^0 = - (\mathcal{E}_{sup} - \sum_{g \neq g^*} B_{ig}^0)$$

- $\mathcal{E}_{sup} = 2892$ c'est-à-dire la valeur d'une solution connue (cf 3.1)

- $B_{ig}^0 = \text{minimum } (t_{fg} - t_{ig})$ soient les valeurs :

n° de gamme	1	2	3	4	5
$B_{ig}^0 = \text{minimum}(t_{fg} - t_{ig})$	295 h	810 h	289 h	271 h	897 h

A partir de ces valeurs nous avons obtenu le s.i.e initial suivant :

N° opération	2	3	4	6	7	8	9	10	11
$[K_i, -K_j]$	0	-1	-2, -1	0	-1	-2, -1	3, -2, -1	-3, -2	-3, -2

N° opération	12	13	14	16	17	18
$[K_i, -K_j]$	-5, -4, -3	-5, 4, -3	-6, -5	-2, -1, 0	-3, -2, -1	-4, -3, -2

N° opération	19	21	22	23	24	25	26
$[K_i, -K_j]$	-4, -3, -2	-1, 0	-2, -1, 0	-2, -1, 0	-2, -1, 0	-2, -1, 0	-2

N° opération	27	28	30	31	32	33	34
$[K_i, -K_j]$	-3, -2, -1	-4, -3, -2, -1	-1	-4, -3, -2	5, -4, -3	-4	-5

3.3 Recherche d'une solution optimale

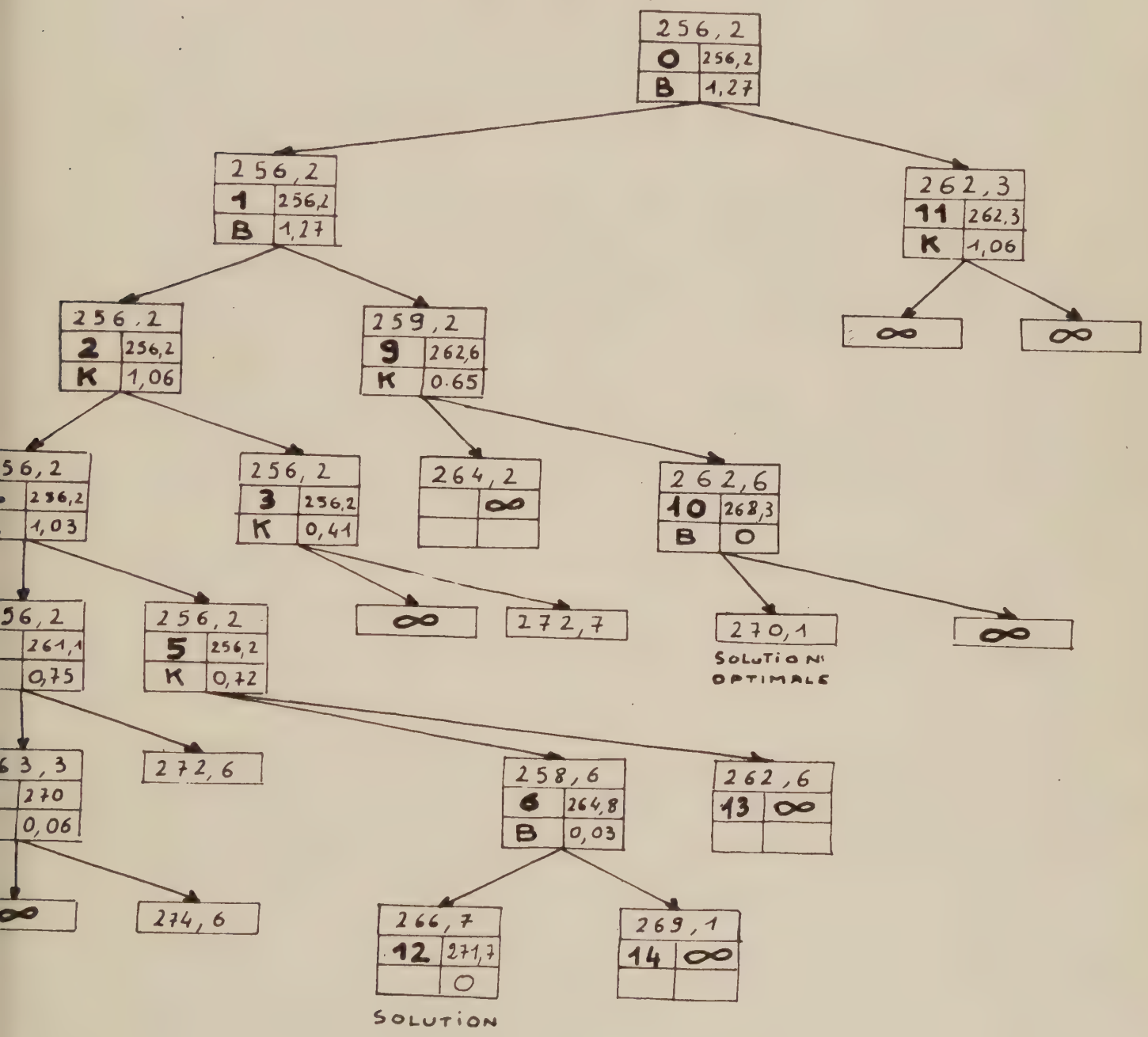
Le déroulement de la procédure S.E.P. est illustrée par l'arborescence ci-dessous.
Les sommets portent les renseignements suivants :

v_1	
n	v_2
A	v_3

Ce sommet, séparé à l'étape n , avait une évaluation par défaut v_1 .
Après la recherche d'un s.i.e. l'évaluation par défaut est devenue v_2
et $v_3 = \sum \{K_j - K_i | i \in N'\} / N'$

Enfin, si $A = B$ on a séparé un intervalle $(B_{ij}, - B_{ij})$
si $A = K$ " " " $(K_i - K_j)$

La durée de ce calcul est 150s (CDC 3600)



TAILLE DES LOTS ET PERIODICITE DE
L'EXECUTION DES TACHES

L'intérêt du regroupement des pièces en lots tient essentiellement à la raison économique suivante :

Avant de commencer l'exécution d'une pièce un poste de travail doit être préparé. Cette préparation réside dans le montage des outils, les réglages, les opérations administratives de "mise en main"...

Le rapport temps de préparation sur temps d'exécution d'une pièce varie généralement entre 0.5 et 20 (0.5 pour les "grosses" pièces, 20 pour la quincaillerie). Pour préciser l'importance du problème nous donnons quelques valeurs prélevées dans un fichier gamme de 700 pièces (les durées sont en heures).

Temps de prépar.	2,5	1,5	5,1	1,2	0,9	3,4	2,3	0,5	1,9
temps d'exécution	0,58	0,126	2,638	0,496	4,328	0,929	0,139	0,111	0,17

La préparation pouvant servir pour plusieurs usinages identiques, au niveau des postes de travail on a donc intérêt à constituer des lots de taille aussi grande que possible compte tenu des limitations dues à l'usure des outils.

L'inconvénient du lotissement est lié aux coûts de stockage :

Dans la mesure où les pièces d'un seul lot couvrent les besoins sur une longue période les stocks de matière première et de produits finis présentent des niveaux extrêmes disproportionnés avec le besoin moyen.

Le problème du calcul de la taille des lots réside donc, à première vue, dans la recherche d'un compromis entre le coût de stockage et le coût de préparation des machines (en pratique, on rencontre couramment des méthodes basées sur la comparaison de ces deux coûts).

En fait dès que les pièces considérées subissent plusieurs opérations (au-delà de 3 ou 4), l'analyse précédente est insuffisante car la taille des lots intervient dans le coût des en cours. Et, l'influence du lotissement sur les en cours étant mesurée à travers la méthode d'ordonnancement, la question

est beaucoup plus difficile.

Les en cours sont fonction de deux types de temps d'attente :

- les temps d'attente entre deux opérations consécutives sur une même machine
- les temps d'attente entre deux opérations consécutives sur un même lot.

Dans cette annexe nous ne traitons que des premiers, plus précisément nous développons les points suivants :

- 1) Dans une fabrication périodiques les tailles de lots sont astreintes à des contraintes sévères mais la régulation des charges est immédiate.
- 2) A l'opposé, dans une fabrication non périodique les tailles de lots peuvent être quelconques, le problème est dans la régulation des charges.
- 3) Il est possible de trouver un moyen terme.

1. RELATION ENTRE LA TAILLE DES LOTS ET LA PERIODE

Nous supposons que le niveau de la fabrication est fixé de manière à établir simplement la relation entre la taille des lots n , la période θ (en mois) et la cadence C : le besoin en pièce A étant C unités/mois, on a l'égalité

$$\theta_A C_A = n_A$$

Si l'on s'en tient au coût du stockage et de la préparation des machines on peut définir une taille "économique" pour chaque pièce. Les périodes associées à ces tailles par la formule ($\theta_i C_i = n_i$, i indice de pièce) peuvent être très différentes les une des autres. A titre d'exemple, pour la fabrication de 700 pièces nous avons observé 25 périodes différentes comprises entre 2 et 300 jours, la moyenne étant 60 jours.

2. TAILLE DES LOTS ET REGULATION DES CHARGES DANS UNE FABRICATION PERIODIQUE

Les tailles de lots doivent satisfaire la contrainte

$$\forall i \quad i \text{ indice de pièce}, \theta C_i = n_i$$

Ces contraintes sont sévères, si les périodes économiques pour le coût de stockage et de préparation varient entre 2 et 300 jours il ne peut être question de les satisfaire.

La régulation des charges est dans ce cas synonyme d'affectation des tâches aux machines puisque l'occupation des machines est répétée périodiquement.

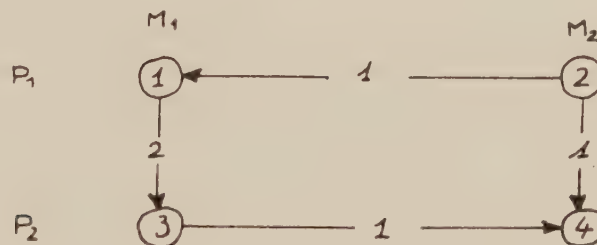
3. TAILLE DES LOTS ET REGULATION DES CHARGES DANS UNE FABRICATION NON PERIODIQUE

Il n'y a pas de contraintes sur la taille des lots.

Les charges dépendent de la topologie du graphe représentant les gammes et l'ordre sur les machines.

Exemple

Il s'agit de la fabrication de deux pièces P_1 et P_2 sur deux machines M_1 et M_2 .



Du fait que $l_{24} = 4 \gg d_2 = 1$ on observe un temps d'attente de 3 unités de temps entre l'exécution de 2 et celle de 4. Cette attente peut être résorbée en exécutant 3 avant 1.

Cet exemple montre de plus que l'hypothèse de l'ordre sur les machines est beaucoup plus discutable dans le cas des fabrications non périodiques que dans celui des fabrications périodiques.

4. UN MOYEN TERME POSSIBLE

Soit n_i la taille du lot de pièces i qui réalise un compromis entre le coût de stockage et de préparation et $\theta_i = n_i / C_i$ la période associée.

Dans la mesure où la répartition de l'ensemble des θ_i présente des modes bien délimités un moyen terme entre ordonnancement périodique et non périodique peut être la méthode suivante :

- Annexe 1 page 4
- 1) on groupe toutes les pièces qui ont des θ_i voisins et, quitte à modifier légèrement les n_i on affecte à ces pièces une période commune qui réalise un compromis entre les θ_i .
 - 2) on établit les affectations des tâches aux machines de manière que les lots de périodes différentes ne soient pas usinés sur le même poste.
 - 3) si malgré tout on ne peut éliminer complètement les "interférences" on isole les machines sur lesquelles elles doivent se produire par des stocks amont et aval.

Enfin, il est à remarquer qu'un ordonnancement périodique et un ordonnancement non périodique peuvent coexister dans le même atelier car les deux méthodes sont des conséquences de la théorie des potentiels sur un graphe. Ainsi les pièces chères peuvent relever d'un modèle périodique et la quincaillerie d'un modèle non périodique ; (le fait que la première catégorie de pièces laisse des disponibilités sur certaines machines est traduit dans le modèle non périodique par des inégalités de potentiel).

REMISE EN CAUSE DE L'ORDRE
SUR LES MACHINES

Quand deux tâches j et j' ne peuvent s'exécuter simultanément leurs dates de début sont astreintes aux contraintes

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{j'} - \mathcal{E}_j \geq \delta_{jj'} d_j - (1 - \delta_{jj'}) \Omega \\ \mathcal{E}_j - \mathcal{E}_{j'} \geq (1 - \delta_{jj'}) d_{j'} - \delta_{jj'} \Omega \\ \delta_{jj'} = 0 \text{ ou } 1, \quad \Omega \text{ très grand} \end{cases}$$

Si $1m, 2m, \dots, em$ sont les tâches qui incombent à la machine m et si m ne peut exécuter deux de ces tâches simultanément, le nombre de séquences possibles sur m est $em!$ Mais, compte tenu de la périodicité, il suffit d'étudier les $(em - 1)!$ séquences de premier élément $1m$.

Remettre en cause l'ordre sur les machines dans un problème défini par Γ_θ consiste à remplacer les contraintes conjonctives entre les y_j par des contraintes du type ci-dessus pour tout couple (j, j') , j et $j' \in \{2m, \dots, em\}$

$$\text{et } y_{jm} - y_{1m} \geq d_{1m}, \quad y_{1m} - y_{jm} \geq d_{jm} - \theta.$$

Plus précisément le nouvel ensemble de contrainte est défini par le graphe $\Gamma_\theta D(k_i, \delta_{jj'})$. (Γ_θ disjonctif) suivant :

Contraintes du nouveau problème : le graphe $\Gamma_\theta D(k_i, \delta_{jj'})$

Ce graphe comprend $2N + 1$ sommets :

- 1) N sommets indicés par i ou un chiffre arabe associés aux "représentants gamme".
- 2) N sommets indicés par j ou un chiffre ~~romain~~ associé aux "représentants machine"
- 3) un sommet 0 associé à une tâche fictive de date de début zéro.

Ses arcs correspondent aux inégalités de potentiel suivantes :

.../

1) les inégalités de potentiel traduisant la périodicité

- $y_i - t_i \gg k_i \theta$ et $t_i - y_j \gg -k_i \theta \quad i \in N' \quad j \sim i \quad k_i \in \mathbb{Z}$
- $t_g = y_j \quad j \sim 1_g \quad g \in G$
- $0 \leq y_{1m} < \theta \quad m \in M \quad (y_0 = 0 \text{ et } y_0 - y_{1m} \gg -\theta + \varepsilon, \quad y_{1m} - y_0 \geq 0)$

2) les inégalités de potentiel définies par le sous graphe des gammes $\mathcal{G}$

3) les inégalités de potentiel marquant la remise en cause de l'ordre sur les machines

- $y_{j'} - y_j \gg D_{jj'} = d_j \delta_{jj'} - (1 - \delta_{jj'}) \Omega$
- $y_{j'} - y_{j'} \gg D_{j'j} = d_{j'} (1 - \delta_{jj'}) - \delta_{jj'} \Omega$

avec

$j \in \{2m, \dots, em\}, \quad j' \in \{j+1, \dots, em\} \quad m \in M$ (on notera $\bigcirc$ cet ensemble des couples (jj') ;

- $y_{1m} - y_j \gg d_j - \theta, \quad y_j - y_{1m} \gg d_{1m} \quad j \in \{2m, \dots, em\}, \quad m \in M$

Exemple de graphe

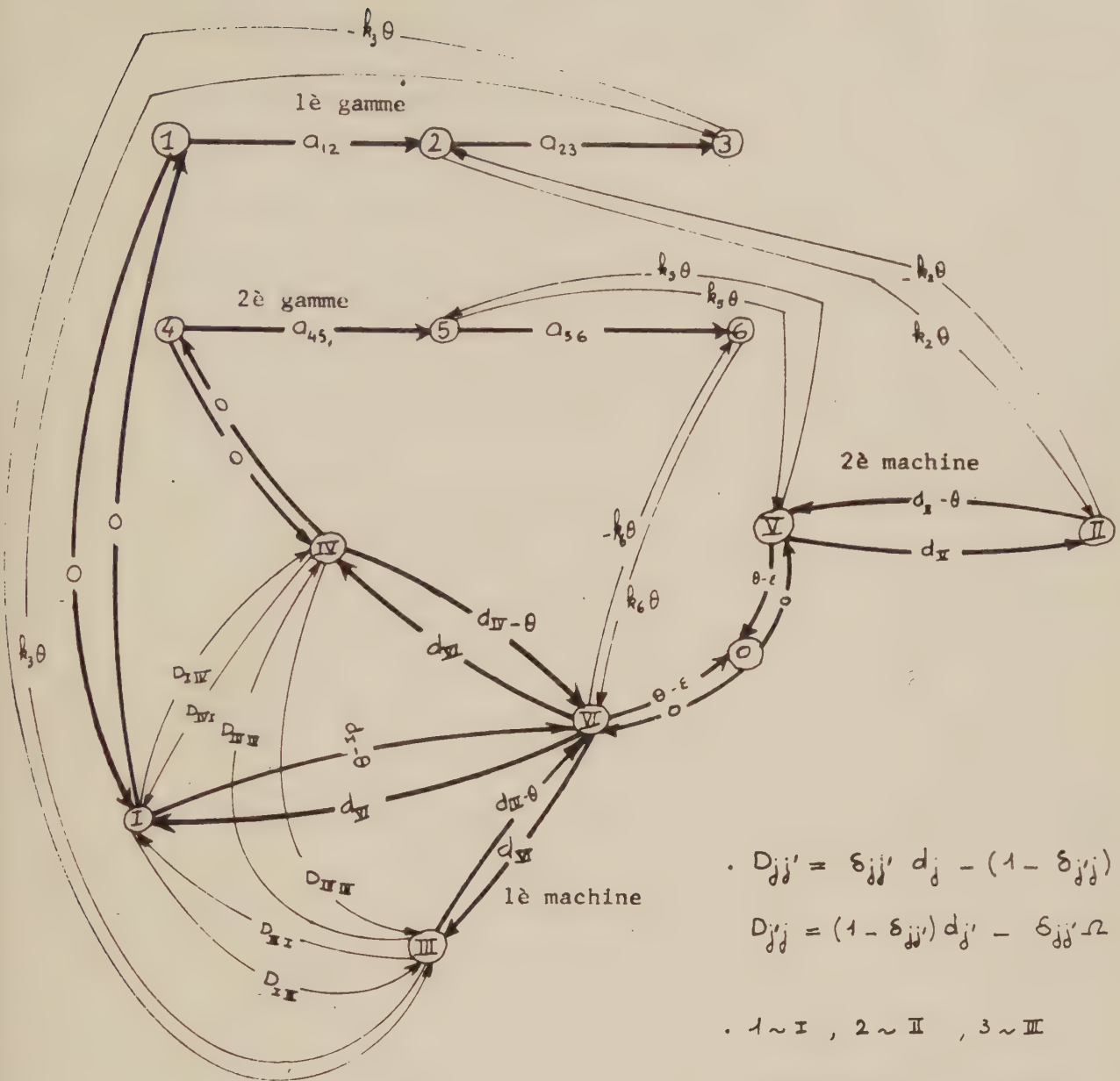


figure 23

$$D_{jj'} = \delta_{jj'} d_j - (1 - \delta_{jj'}) \Omega$$

$$D_{j'j} = (1 - \delta_{jj'}) d_{j'} - \delta_{jj'} \Omega$$

$$1 \sim I, 2 \sim II, 3 \sim III$$

$$4 \sim IV, 5 \sim V, 6 \sim VI$$

$$1 = 1_1, 4 = 1_2; 3 = 1_1, 6 = 1_2$$

$$VI = \text{lère opération sur la machine 1}$$

$$V = \text{lère " " " 2}$$

note : Les arcs du graphe $\Gamma_0 D$ associé aux inégalités de potentiels dont le second membre est constant sont tracés en traits forts.

Le but de cette annexe est d'étendre la notion de s.i.e à ce problème. Pour cela nous reprenons la démarche du développement principal, c'est-à-dire

- 1) on établit la proposition⁹ qui permet de connaître les bornes supérieures sur les k ou les δ ,
- 2) on adapte l'algorithme 2

Définitions préalables à l'énoncé de la proposition 9

Soit le graphe $\Gamma_{\theta} DG (K_i, K_j \ i \in N'; \Delta_{jj'}, \Delta_{j'j} \ (j, j') \in O; B_{1g}, B_{fg} \ g \in G)$
(abrev : $\Gamma_{\theta} DG (K, \Delta, B)$) déduit de $\Gamma_{\theta} D$ par les adjonctions suivantes :

- 1 - on trace les arcs associés aux contraintes $b_g \in [B_{1g}, -B_{fg}]$ soit

$$t_{1g} - t_{fg} \geq B_{fg} \quad \text{et} \quad t_{fg} - t_{1g} \geq B_{1g}$$

- 2 - on trace les arcs associés aux contraintes $k_i \in [K_i, -K_j]$ c'est-à-dire

$$y_j - t_i \geq K_i \theta \quad \text{et} \quad t_i - y_j \geq K_j \theta;$$

$K_i, K_j \in \mathbb{Z}$, ce sont des constantes

- 3 - on trace les arcs associés aux contraintes $\delta_{jj'} \in [\Delta_{jj'}, 1 - \Delta_{jj'}]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{j'} - y_j \geq d_j \Delta_{jj'} - (1 - \Delta_{jj'}) \Omega \\ y_j - y_{j'} \geq d_{j'} \Delta_{j'j} - (1 - \Delta_{j'j}) \Omega \\ (j, j') \in O, \quad \Delta_{jj'} = 0 \text{ ou } 1, \quad \Delta_{j'j} = 1 \text{ ou } 0 \end{array} \right.$$

$\Delta_{jj'}$ et $\Delta_{j'j}$ sont des constantes.

Nous appellerons problème défini par $\Gamma_{\theta} DG (K, \Delta, B)$ la recherche d'inconnues $\{t_i, y_j : i \in N\}$, $\{k_i : i \in N'\}$, $\{\delta_{jj'} : (j, j') \in O\}$ satisfaisant

- les contraintes conjonctives définies par $\Gamma_{\theta} DG (K, \Delta, B)$
- les contraintes $y_j = t_i + k_i \theta \quad i \in N' \quad j \sim i$
- les contraintes $y_{j'} - y_j \geq D_j(\delta_{jj'}), \quad y_j - y_{j'} \geq D_{j'}(\delta_{j'j})$

Proposition 9

$l_{\alpha\alpha'}$ étant la longueur du plus long chemin du sommet α au sommet α' de $\Gamma_{\theta} DG(\kappa, \Delta, B)$,

- 1) Le minimum et le maximum de k_i pour le problème défini par $\Gamma_{\theta} DG(\kappa, \Delta, B)$ sont donnés par

$$k_i^{\min} = E^+(l_{ij}/\theta) \quad \text{et} \quad k_i^{\max} = E^-(-l_{ji}/\theta)$$

- 2) $l_{jj'} + d_{j'} > 0 \Rightarrow \delta_{jj'} = 1$
 $l_{j'j} + d_j > 0 \Rightarrow \delta_{jj'} = 0$

La preuve est immédiate, on écrit que la longueur du plus long circuit passant par i et j $j \sim i$ ou j et j' est négative ou nulle.

De la proposition 9 on déduit la définition d'un s.i.e pour le problème résultant de la remise en question de l'ordre sur les machines :

Définition 7

Le système d'intervalles $\{[\kappa_i, -\kappa_j], [\Delta_{jj'}, 1 - \Delta_{jj'}]\}$ est un s.i.e contenant toutes les solutions telles que $b_g \in [B_{1g}, -B_{fg}]$ si et seulement si

- 1) $\kappa_i = l_{ij}/\theta \quad \kappa_j = l_{ji}/\theta \quad \forall i \in N' \quad j \sim i \quad \kappa_i, \kappa_j \in \mathbb{Z}$
 2) $l_{jj'} + d_{j'} > 0 \Rightarrow \Delta_{jj'} = 1 \quad (\Delta_{jj'} = 1 \text{ ou } 0)$
 $l_{j'j} + d_j > 0 \Rightarrow \Delta_{jj'} = 1 \quad (\Delta_{jj'} = 0 \text{ ou } 1)$

Algorithme 4 - Construction d'un s.i.e contenant toutes les solutions telles que $\sum c_g b_g \leq \mathcal{E}_{\text{sup}}$.

étape 0

On part de $\Gamma_{\theta} DG(\kappa_i^0 = \kappa_j^0 = -\infty; \Delta_{jj'}^0 = \Delta_{j'j}^0 = 0; B_{1g}^0, B_{fg}^0)$ les B^0 sont calculés de la même manière qu'en 2.33.

étape q

initialisation : $\forall i \in N' : j \sim i \quad \kappa_i^q = \kappa_i^{q-1} ; \kappa_j^q = \kappa_j^{q-1}$

$\forall (j, j') \in O \quad \Delta_{jj'}^q = \Delta_{jj'}^{q-1} ; \Delta_{j'j}^q = \Delta_{j'j}^{q-1}$

$\forall g \in G \quad B_{1g}^q = B_{1g}^{q-1} ; B_{fg}^q = B_{fg}^{q-1}$

note : $l_{\alpha\alpha'}^q$ est la longueur du plus long chemin de α à α' dans $\Gamma_0 DG(\kappa^q, \Delta^q, B^q)$

1er cas $\exists i_* \in N' : l_{i_*j_*}^q > \kappa_{i_*}^q \theta$ ou/et $l_{j_*i_*}^q > \kappa_{j_*}^q \theta$

on affecte à $\kappa_{i_*}^q$ la valeur $E^+(l_{i_*j_*}^q / \theta)$ ou

" " $\kappa_{j_*}^q$ " $E^+(l_{j_*i_*}^q / \theta)$

si $\kappa_{i_*}^q + \kappa_{j_*}^q < 0$ on passe à l'étape $q + 1$, sinon au 4è cas

2ème cas $\exists (j, j') \in O : l_{jj'}^q + d_{jj'} > 0$ ou $l_{j'j}^q + d_{j'j} > 0$

on affecte à $\Delta_{jj'}^q$ la valeur 1 ou

" " $\Delta_{j'j}^q$ " 1

si $\Delta_{jj'}^q + \Delta_{j'j}^q < 1$ on passe à l'étape $q + 1$, sinon au 4ème cas

3ème cas $\exists g_* \in G : l_{1g_*}^q > B_{1g_*}^q + \varepsilon$

on affecte à $B_{1g_*}^q$ la valeur $l_{1g_*}^q$ et

$\forall g_0$ à $B_{fg_0}^q$ la valeur $(1/c_{g_0})(\mathcal{E}_{sup} - \sum_{g \neq g_0} c_g B_{1g}^q)$

4ème cas $\exists i \in N' : \kappa_i^q + \kappa_j^q > 0$ ou $\exists (j, j') \in O : \Delta_{jj'}^q + \Delta_{j'j}^q > 1$
le problème n'a pas de solution

5ème cas $\{[\kappa_i^q, -\kappa_j^q], [\Delta_{jj'}^q, 1 - \Delta_{j'j}^q] \mid i \in N' (j, j') \in O\}$ est un s.i.e

BIBLIOGRAPHIE

- (1) C. BERGE - "Théorie des graphes et ses applications" DUNOD 1958
- (2) B. ROY - "Cheminement et Connexité dans les graphes - application aux problèmes d'ordonnancement" METRA Série spéciale n° 1, 1962
- (3) B. ROY et B. SUSSMANN - "Les problèmes d'ordonnancement avec contraintes disjonctives" SEMA, Direction Scientifique, 1964
- (4) R. CRUON et PH. HERVE "Quelques résultats relatifs à une structure algébrique et à son application au problème central de l'ordonnancement" (AFIRO N° 3)
- (5) B. ROY, NGHIEM PHONG TUAN, P. BERTIER - "Programmes linéaires en nombres entiers et procédure S.E.P." METRA vol. IV n° 3, 1965
- (6) Monographie de la recherche opérationnelle n° 2 : les problèmes d'ordonnancement DUNOD
- (7) Revue Française de Recherche opérationnelle n° 38 : n° spécial sur l'ordonnancement
- (8) P. ROBERT et J. FERLAND - "Généralisation de l'algorithme de WARSHALL" Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle n° 7, R1 Janv/Fév. 1968
- (9) J. TOMESCU - "Sur l'algorithme matriciel de B. ROY" Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle n° 7, R1 Janv/Fév. 1968
- (10) L. NEMETI - "Sur le problème d'ordonnancement dans la fabrication en série" Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle n° 11, 1968
- (11) B. ROY - "Procédures d'exploration par séparation et évaluation (P.S.E.P. et P.S.E.S.)" Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle n° V - I juin 1968
- (12) J. CERVERA, B. SUSSMANN - "Une classe de problèmes d'ordonnancement de tâches répétitives" SEMA Direction Scientifique note de travail n° 101 août 1969
- (13) B. ROY - "Algèbre moderne et théorie des graphes orientés vers les sciences économiques et sociales" Tome 1 DUNOD 1969
- (14) B. ROY - Tome 2 de (13) DUNOD 1970
- (15) Prof. ARSAC, J. BERSTEL, C. FAULLE, C. GIRAULT, A. JACQUES, C. LENORMAND, JF PERROT, Y PETIT - "Contrat graphes" Institut de programmation
- (16) M. AZEMA - "Modèle mathématique d'ordonnancement de fabrication en série" R.I.R.O. V2 1970

UNIVERSITE de PARIS VI

II, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE

Bureau des Enseignements du 3^e Cycle

tél. 336.25.25 et 325.12.21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : DOCTEUR - INGENIEUR

THESE DE : /

NOM : A Z E M A

Prénoms : MAURICE

né le 12 AVRIL 19 44 à TOULOUSE . . (Hte.GARONNE) Dép^t : - . .

1^{ère} THESE : " ETUDE D'UN MODELE MATHEMATIQUE POUR LES
FABRICATIONS PERIODIQUES. "

2^e THESE (Propositions faites par l'Université) : GRAPHS ALEATOIRES



Vu et Approuvé

PARIS, le . . . 5 . MAI . 1971.

Le Président

de l'Université de PARIS VI

A handwritten signature in dark ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke.

